

1. Notazioni e preliminari

Si farà uso prevalentemente di una simbologia matriciale, conveniente da un punto di vista computazionale, ma in qualche capitolo sarà preferibile adottare una simbologia indiciale, più intellegibile da un punto di vista teorico. È quindi opportuno familiarizzarsi con ambedue gli approcci.

1.1. Matrici

Si consideri lo spazio cartesiano reale ad n dimensioni \mathbb{R}^n , i cui elementi sono le n -ple di numeri reali. Per *vettore* con origine nel punto x di \mathbb{R}^n si intende una coppia ordinata di punti (x, y) di \mathbb{R}^n , e tale vettore si indicherà con il simbolo \vec{xy} . Il vettore \vec{Oy} , con origine nell'origine degli assi, si indica di solito con \mathbf{y} , e si può identificare con il corrispondente punto dello spazio n -dimensionale. Si consideri ora una applicazione lineare $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, che ad ogni vettore \mathbf{x} di \mathbb{R}^n associa un vettore $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ di \mathbb{R}^m . All'applicazione A può sempre associarsi una matrice ad n righe ed m colonne, rappresentabile, in un determinato sistema di riferimento, come:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Viceversa, assegnata la matrice \mathbf{A} ad n righe ed m colonne, resta definita una applicazione lineare da \mathbb{R}^n ad \mathbb{R}^m .

1.2. Matrici speciali

Si incontrano spesso alcuni tipi particolari di matrici, che meritano pertanto speciale attenzione.

Definizione 1.1: Una matrice \mathbf{A} ad n righe ed una colonna si dice *vettore colonna*, mentre una matrice \mathbf{A} ad una riga ed m colonne si dice *vettore riga*.

Definizione 1.2: Una matrice \mathbf{A} ad n righe ed n colonne si dice una *matrice quadrata* di ordine n .

Le matrici quadrate rappresentano la maggioranza delle matrici con cui occorrerà operare. Limitatamente ad esse si hanno le seguenti definizioni:

Definizione 1.3: Una matrice quadrata si dice *simmetrica* se $a_{ij} = a_{ji}$. Una matrice quadrata si dice *antisimmetrica* se $a_{ij} = -a_{ji}$.

Definizione 1.4: Una matrice quadrata si dice *diagonale* se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Se inoltre una matrice diagonale è tale che $a_{ii} = 1$, allora la matrice si dice *identica*, o *unitaria*.

Definizione 1.5: Una matrice quadrata si dice *triangolare bassa* se tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale sono nulli, ossia se $a_{ij} = 0$ per $i < j$. Una matrice quadrata si dice *triangolare alta* se tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli, ossia se $a_{ij} = 0$ per $i > j$.

1.3. Operazioni su matrici

Definizione 1.6: Siano \mathbf{A} e \mathbf{B} due matrici dello stesso ordine, ossia con lo stesso numero di righe e di colonne. Si definisce *somma* di \mathbf{A} e \mathbf{B} una matrice \mathbf{C} , dello stesso ordine, i cui elementi sono forniti da:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1.2)$$

Definizione 1.7: Si definisce *differenza* di \mathbf{A} e \mathbf{B} una matrice \mathbf{C} , dello stesso ordine, i cui elementi sono forniti da:

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (1.3)$$

Può mostrarsi che sia la somma che la differenza sono operazioni commutative ed associative.

Definizione 1.8: Sia \mathbf{A} una matrice di ordine $(n \times m)$, e sia k uno scalare. Si definisce *prodotto* tra \mathbf{A} e k la matrice \mathbf{B} , dello stesso ordine di \mathbf{A} , i cui elementi sono forniti da:

$$b_{ij} = ka_{ij}. \quad (1.4)$$

Definizione 1.9: Sia \mathbf{A} una matrice di ordine $(m \times p)$, e sia \mathbf{B} una matrice di ordine $(p \times n)$. Si definisce *prodotto* tra \mathbf{A} e \mathbf{B} la matrice \mathbf{C} , di ordine $(m \times n)$, i cui elementi sono forniti da:

$$c_{ij} = a_{ik}b_{kj} \quad k = 1, \dots, p. \quad (1.5)$$

Si noti l'uso della convenzione degli indici ripetuti, per cui è sottinteso il simbolo di sommatoria ovunque vi siano due indici ripetuti nello stesso membro.

Nota 1.1: - Il prodotto matriciale è associativo, ma non commutativo, ossia in generale $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Definizione 1.10: Sia \mathbf{A} una matrice di ordine $(m \times n)$. Si definisce *matrice trasposta* \mathbf{B} (e si indica con \mathbf{A}^T) una matrice di ordine $(n \times m)$, i cui elementi sono forniti da:

$$b_{ij} = a_{ji}. \quad (1.6)$$

Assegnate due matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} di ordine opportuno, si dimostra che:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (1.7)$$

Definizione 1.11: Sia \mathbf{A} una matrice quadrata di ordine n . La matrice inversa di \mathbf{A} , indicata con \mathbf{A}^{-1} , è una matrice quadrata di ordine n , tale che:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad (1.8)$$

dove \mathbf{I} è la matrice identica di ordine n . Si noti che non è detto che l'inversa di una generica matrice quadrata esista, e che comunque il suo calcolo non è immediato. Esistono svariate tecniche numeriche per risolvere il problema. Per una particolare classe di matrici, il calcolo dell'inversa diviene banale:

Definizione 1.12: Una matrice quadrata \mathbf{A} si dice *ortogonale* se la sua inversa coincide con la sua trasposta:

$$\mathbf{A} \text{ ortogonale} \iff \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1} \quad (1.9)$$

Si dimostra che una matrice ortogonale ha determinante pari a ± 1 .

1.4. Cambiamento di riferimento

Come si è già detto, una applicazione lineare di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n può rappresentarsi, in un determinato sistema di riferimento, tramite la matrice \mathbf{A} associata, di ordine n . Si vuol studiare ora come varia la matrice rappresentativa \mathbf{A} al variare del sistema di riferimento, limitandosi, per semplicità, al caso tridimensionale. Si consideri allora un sistema di riferimento trirettangolare (x, y, z) , e si immagini che questo sistema di riferimento venga ruotato di un angolo ϕ , dando luogo al nuovo sistema di riferimento

(x', y', z') . Sia P un punto dello spazio tridimensionale, con coordinate (x, y, z) nel vecchio sistema di riferimento, ed (x', y', z') nel nuovo sistema di riferimento. Le nuove coordinate si ottengono, in funzione delle vecchie, tramite la relazione :

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

o anche, matricialmente:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}\mathbf{x} \quad (1.11)$$

La matrice \mathbf{T} si chiama *matrice di trasformazione*, ed in essa sono raggruppati i coseni direttori dei nuovi assi rispetto ai vecchi assi. Si dimostra che \mathbf{T} è ortogonale. Sia ora \mathbf{A}' la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare A in oggetto, nel sistema di riferimento (x', y', z') . Si ha:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad (1.12)$$

nel vecchio sistema di riferimento, e

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}'\mathbf{y}' \quad (1.13)$$

nel nuovo sistema di riferimento, con \mathbf{y}' e \mathbf{z}' forniti rispettivamente da:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{T}\mathbf{y} \quad (1.14)$$

e da:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{T}\mathbf{z}. \quad (1.15)$$

Sostituendo queste due relazioni nella (1.13) si ottiene:

$$\mathbf{T}\mathbf{z} = \mathbf{A}'\mathbf{T}\mathbf{y} \quad (1.16)$$

ossia, premoltiplicando per \mathbf{T}^{-1} :

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{T}\mathbf{y}. \quad (1.17)$$

Dal paragone con la (1.12), e dall'ortogonalità di \mathbf{T} , si trae la relazione:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{T} = \mathbf{T}^T\mathbf{A}'\mathbf{T} \quad (1.18)$$

ed analogamente:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^T. \quad (1.19)$$

È questa la legge che lega la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare A al variare del sistema di riferimento. In notazione indiciale, la relazione (1.19) si scrive:

$$a'_{ij} = l_{ik}l_{jm}a_{km} \quad (1.20)$$

1.5. Le forme quadratiche

Concetto fondamentale, ed estensivamente usato, è quello di *forma quadratica*:

Definizione 1.13: Siano \mathbf{x} ed \mathbf{y} due vettori di ordine n . Una funzione f di \mathbf{x} ed \mathbf{y} che sia lineare ed omogenea in ambedue le variabili si chiama una *forma bilineare*:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (1.21)$$

dove \mathbf{A} è una matrice di ordine n , detta matrice rappresentativa della forma bilineare. Se $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, allora f si dice una *forma quadratica*. La matrice rappresentativa di una forma quadratica è sempre simmetrica. Ed infatti, qualunque matrice quadrata può esprimersi come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica, ed è immediato riconoscere che la forma quadratica retta dalla matrice antisimmetrica si annulla. Al variare del sistema di riferimento, la matrice rappresentativa della forma quadratica f si trasforma secondo la legge (1.19). Si avrà pertanto:

$$f = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}'^T \mathbf{A}' \mathbf{x}' = \mathbf{x}^T \mathbf{T}^T \mathbf{A}' \mathbf{T} \mathbf{x}. \quad (1.22)$$

1.6. Note bibliografiche

Un qualsiasi testo di algebra lineare può servire ad integrare quanto accennato in questo capitolo. Si segnalano ad esempio, in lingua italiana, Strang [1976], Lang [1970], e Barozzi [1976].