

2. Metodi variazionali in teoria dell'elasticità

2.1. Cenni storici

Principio dei lavori virtuali. I primi albori del principio dei lavori virtuali si ritrovano forse nel Capitolo 5 del libro VII di Aristotele, o, più fondatamente, nell'opera del trecentista Giordano Nemorario, come dedotto da P.Duhem in *Les Origines de la Statique* 1, p.121, Parigi, 1905 (riportato in E.Benvenuto [1981]). In seguito Cartesio ne farà il fondamento della sua concezione della Statica, come chiaramente espresso nella lettera a Christian Huygens del 1637. La definizione moderna è contenuta nella celebre lettera di Giovanni Bernoulli a Varignon del 26 gennaio 1717, anche se la piena applicazione del metodo a problemi strutturali si avrà solo con la serie di *Beiträge* che Otto Mohr pubblicò a più riprese sulla *Zeitschrift des Architekten und Ingenieur Vereins* di Hannover, "fondando la moderna scienza delle Costruzioni" (Benvenuto). Nel primo lavoro, dal titolo 'Beiträge zur Theorie der Bogenfachwerksträge' [1874] Mohr fornisce la "prima applicazione del p.l.v. per il calcolo dell'iperstatica in un sistema reticolare dotato di un'asta sovrabbondante", come lui stesso dichiarò nell'autobiografia. Nel secondo lavoro, 'Beiträge zur Theorie des Fachwerks', pubblicato a due riprese nel 1874 e 1875, si illustra il metodo generale di calcolo per travature reticolari isostatiche ed iperstatiche, ed infine, nel 'Beiträge zur Theorie des Bogenfachwerks' [1881] si esamina l'arco a traliccio simmetrico tre volte iperstatico, in presenza di variazioni termiche.

Teoremi energetici. Il primo teorema energetico è dovuto a Clapeyron, che enuncia il suo teorema nel 1858, in una memoria per i *Comptes Rendus*, anche se nella sua forma astratta il teorema era già stato enunciato nel testo di teoria dell'elasticità di Lamé. Contemporaneamente, Luigi Federico Menabrea dà alle stampe il suo 'principio di elasticità', la cui dimostrazione rigorosa sarà fornita da Alberto Castigliano, nella tesi di laurea al politecnico di Torino (1873). Nel 1879 Castigliano pubblica a Torino la *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, di cui Timoshenko ebbe a dire che 'ben poco è stato aggiunto a questa branca della teoria delle strutture da quando Castigliano scrisse il suo famoso libro' (S.Timoshenko, [1953], pp.292). Nel 1882 Castigliano pubblica 'Intorno ad una proprietà dei sistemi elastici', sugli Atti della Regia Accademia delle Scienze di Torino, in cui fornisce un teorema che

comprende come casi particolari i teoremi di Maxwell e di Betti. Muore nel 1884, a 37 anni. Il ‘principio di elasticità’ è il primo teorema di minimo, e come si è visto fu enunciato da Menabrea. Tuttavia tale principio era dimostrato originariamente in modo molto dubbio, e suscitò vivissime polemiche (Benvenuto, pp.819 e segg.). In seguito Cotterill e Castigliano enunciano e dimostrano i due teoremi delle derivate del lavoro di deformazione, che generalizzano il principio di Menabrea. Il *lavoro di deformazione* nella terminologia di Castigliano era l’energia potenziale elastica. Poiché ci si limitava al caso di elasticità lineare, tale energia poteva essere indifferentemente espressa in termini di spostamenti (energia potenziale totale) ed in termini di forze (energia complementare). È solo con Francesco Crotti (1839-1896) che si fa luce sulla differenza tra e.p.t. ed e.c., e sul fatto che il primo teorema di Castigliano si riferisce all’energia potenziale totale (dando luogo al principio di minimo dell’e.p.t), mentre il secondo teorema si riferisce all’energia complementare (dando luogo al principio di minimo dell’e.c.). Il lavoro di Crotti [1878, 1888] rimase — e rimane — largamente sconosciuto, cosicché ancora oggi il merito di aver chiaramente illustrato la differenza tra e.p.t. ed e.c. è spesso attribuito ad Engesser [1889].

2.2. I problemi ai limiti e le soluzioni classiche

Si consideri un solido S nello spazio a tre dimensioni, di frontiera F , e sia O un suo punto. Se $T = (\sigma_{ij})$ ed $E = (e_{ij})$ sono rispettivamente il tensore delle tensioni ed il tensore delle deformazioni relativi al punto O , le *equazioni differenziali di equilibrio* sono espresse da:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

con X_i forze di massa. Tali equazioni hanno carattere locale, pur valendo in ogni punto del corpo S . Si vogliono esprimere invece in questo capitolo alcune condizioni di equilibrio in termini integrali ed energetici.

Definizione 2.22: Nel punto $O \in S$ vale la *legge generalizzata di Hooke* se esiste una relazione lineare tra E e T :

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk} e_{hk} \quad i, j, h, k = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Le 81 costanti $c_{ijhk}(x)$ si chiamano *costanti elastiche*. Le proprietà di simmetria di E e T implicano le condizioni di *simmetria minore*:

$$c_{ijhk} = c_{jihk} \quad c_{ijhk} = c_{ijkh} \quad (2.3)$$

Supponendo il materiale conservativo si ha anche la seguente *simmetria maggiore*:

$$c_{ijhk} = c_{hkij} \quad (2.4)$$

e quindi le costanti elastiche si riducono a 21. Ulteriori riduzioni non sono possibili, in generale, come confermato sperimentalmente da prove di laboratorio sulla cosiddetta 'pietra blu', che è caratterizzata da 21 costanti elastiche diverse.

Definizione 2.23: Se le costanti elastiche non dipendono dal punto O del corpo S, allora S si dice *omogeneo*. Se le costanti elastiche non dipendono dal particolare sistema di riferimento, allora S si dice *isotropo*. Si può dimostrare che in ipotesi di materiale isotropo le costanti elastiche si riducono a 2, valendo il:

Teorema 2.1: Per materiali isotropi la legge di Hooke si scrive:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \delta_{ij} \vartheta \quad (2.5)$$

con $\vartheta = e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$.

DIM. La dimostrazione sarà condotta in tre fasi successive. Si prova anzitutto il seguente:

Lemma 2.1: Nei materiali isotropi, le direzioni principali di tensione coincidono con le direzioni principali di deformazione

DIM. - Si orientino gli assi coordinati secondo le direzioni principali di deformazione, in modo che $e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$. Si proverà che $\sigma_{23} = 0$. Usando le leggi di Hooke si ha:

$$\sigma_{23} = Ae_{11} + Be_{22} + Ce_{33}. \quad (2.6)$$

Si ruotino ora gli assi coordinati di 180° intorno all'asse z , in modo che $x' = -x$, $y' = -y$ e $z' = z$. La matrice di questa trasformazione è:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

e quindi le nuove quantità tensoriali in questo nuovo riferimento sono:

$$\sigma'_{23} = a_{2i}a_{3j}\sigma_{ij} = -\sigma_{23} \quad (2.8)$$

$$e'_{11} = a_{1i}a_{1j}e_{ij} = e_{11} \quad (2.9)$$

$$e'_{22} = a_{2i}a_{2j}e_{ij} = e_{22} \quad (2.10)$$

$$e'_{33} = a_{3i}a_{3j}e_{ij} = e_{33} \quad (2.11)$$

può essere facilmente automatizzata; tutti i moderni metodi ed i moderni programmi di analisi strutturali si basano sul metodo dei cedimenti.

Solo recentemente si assiste ad un rinnovato interesse per versioni opportunamente modificate del metodo delle forze, e ci si comincia ad interrogare se non sia possibile re-introdurre questo approccio [Felippa 1987]. Le linee di ricerca attuale sono volte ad automatizzare convenientemente la scelta delle incognite iperstatiche [Kaneko et al. 1982], o a modificare sostanzialmente la stessa logica portante del metodo, eliminando del tutto le incognite iperstatiche, ed assumendo quali incognite primarie tutte le caratteristiche della sollecitazione interna nelle aste. Questa è la via seguita nel cosiddetto metodo delle forze integrale (IFM) [Patnaik et al. 1973, 1976, 1982, 1989, 1990, 1991] che in un confronto diretto col classico metodo degli elementi finiti (basato sul metodo dei cedimenti) riesce vincitore, sia sul piano della velocità computazionale, che sul piano dell'affidabilità dei risultati (Patnaik et al. [1991]).

3.2. I carichi nodali

I carichi agenti su di una struttura possono suddividersi in carichi *nodali*, che agiscono nei nodi, e carichi agenti sugli elementi. Ai fini di una qualsiasi analisi matriciale della struttura, questi carichi agenti sugli elementi devono essere in qualche modo rimpiazzati da *carichi nodali equivalenti*:

Definizione 3.22: Assegnata una struttura S , soggetta ai carichi $\{Q_i\}$ agenti sugli elementi, si definiscono *carichi nodali equivalenti* ai $\{Q_i\}$, i carichi nodali che, applicati alla struttura, causano gli stessi spostamenti nodali causati dai $\{Q_i\}$.

L'effettiva determinazione dei carichi nodali equivalenti può condursi applicando il:

Teorema 3.1: Sia assegnata una struttura S , soggetta ai carichi nodali $\{P_i\}$ ed ai carichi sugli elementi $\{Q_i\}$. Per ottenere i carichi nodali equivalenti ai $\{Q_i\}$:

1. si separano i carichi nodali dai carichi sugli elementi
2. si eliminano tutte le libertà di nodo, incastrando tutti i nodi
3. si calcolano le caratteristiche nei nodi che nascono sullo schema incastrato per effetto dei carichi sugli elementi
4. le caratteristiche così trovate, cambiate di segno, forniscono i carichi nodali equivalenti
5. la somma dei carichi nodali e dei carichi nodali equivalenti fornisce l'insieme di carichi desiderati.

DIM. La dimostrazione si basa sul principio di sovrapposizione degli effetti, e può essere condotta sull'esempio di Figura 3.1, dove è illustrata una trave incastrata ed appoggiata, con sbalzo, soggetta ai carichi nodali M e P , ed ai carichi sugli elementi q e P' .

24 Elementi finiti e strutture

Per l'isotropia, può scriversi:

$$\sigma'_{23} = Ae'_{11} + Be'_{22} + Ce'_{33} = Ae_{11} + Be_{22} + Ce_{33} = \sigma_{23} \quad (2.12)$$

e quindi da un lato $\sigma'_{23} = \sigma_{23}$, dall'altro $\sigma'_{23} = -\sigma_{23}$, da cui $\sigma_{23} = 0$. Analogamente si dimostra che $\sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$

Nella seconda fase della dimostrazione si prova la legge di Hooke per materiali isotropi nelle direzioni principali. Si consideri la componente σ_{11} , che — orientando gli assi coordinati secondo le direzioni principali — può esprimersi come:

$$\sigma_{11} = ae_{11} + be_{22} + ce_{33} \quad (2.13)$$

Si ruoti il sistema di assi coordinati di 90° intorno all'asse x , in modo che $x' = x$, $y' = z$ e $z' = -y$. La matrice di trasformazione è:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= a_{1i}a_{1j}\sigma_{ij} = \sigma_{11} \\ e'_{11} &= a_{1i}a_{1j}e_{ij} = e_{11} \\ e'_{22} &= a_{2i}a_{2j}e_{ij} = e_{33} \\ e'_{33} &= a_{3i}a_{3j}e_{ij} = e_{22} \end{aligned} \quad (2.15)$$

ed ancora:

$$\sigma'_{11} = ae'_{11} + be'_{22} + ce'_{33} = ae_{11} + be_{33} + ce_{22} \quad (2.16)$$

Poichè $\sigma'_{11} = \sigma_{11} = ae_{11} + be_{22} + ce_{33}$, se ne deduce che deve essere $b = c$. Quindi può scriversi:

$$\sigma_{11} = ae_{11} + b(e_{22} + e_{33}) = (a - b)e_{11} + b\vartheta = \lambda\vartheta + 2\mu e_{11} \quad (2.17)$$

Simili relazioni possono ricavarsi per σ_{22} e per σ_{33} .

La terza ed ultima parte della dimostrazione riguarda la generalizzazione della legge ora dimostrata in direzioni principali al caso in cui gli assi sono orientati arbitrariamente nello spazio.

La forma quadratica delle tensioni in direzioni principali si scrive:

$$\sigma_{11}\xi_1^2 + \sigma_{22}\xi_2^2 + \sigma_{33}\xi_3^2 = \lambda\vartheta(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) + 2\mu(e_{11}\xi_1^2 + e_{22}\xi_2^2 + e_{33}\xi_3^2) \quad (2.18)$$

La stessa forma quadratica in un nuovo sistema di coordinate si scrive:

$$\sigma'_{ij}\xi_i\xi_j = \lambda\vartheta'(\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2) + 2\mu e'_{ij}\xi_i'\xi_j' \quad (2.19)$$

e questo implica che i coefficienti della forma quadratica siano uguali. Se ne deduce:

$$\sigma'_{ij} = \lambda\vartheta'\delta_{ij} + 2\mu e'_{ij} \quad (2.20)$$

I coefficienti λ e μ si chiamano *coefficienti di Lamé*, e sono legati alle costanti (più familiari agli ingegneri) E , modulo di Young e ν (modulo di Poisson) dalle relazioni:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.21)$$

Le equazioni di Cauchy dell'equilibrio elastico

Se si sostituisce la legge di Hooke per materiali isotropi nelle equazioni di equilibrio (2.1) si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\lambda\delta_{ij}\vartheta) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + X_i = 0 \quad (2.22)$$

dove si sono anche utilizzate le relazioni che legano le e_{ij} alle derivate prime degli spostamenti:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.23)$$

Se il corpo è omogeneo, e quindi le costanti di Lamé non dipendono dal punto, allora le (2.22) divengono:

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + X_i = 0 \quad (2.24)$$

Tenendo conto che:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \Delta u_i \quad (2.25)$$

dove Δ è l'operatore *laplaciano*, e che:

$$\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \vartheta \quad (2.26)$$

si giunge alle classiche *equazioni di Cauchy dell'equilibrio elastico*:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + X_i = 0 \quad (2.27)$$

Definizione 2.24: Sia S un corpo tridimensionale di frontiera $F = F_t \cup F_u$. Sulla parte di frontiera F_u siano assegnati gli spostamenti f_i , mentre sulla parte di frontiera F_t siano assegnate le forze superficiali T_i .

Il *problema ai limiti fondamentale dell'elasticità lineare* è la ricerca di un campo di spostamenti $u_i(x)$ che soddisfi le equazioni di Cauchy (2.27) all'interno del corpo, le equazioni di congruenza:

$$u_i = f_i \quad \text{su } F_u, \quad (2.28)$$

e le condizioni di equilibrio:

$$\sigma_{ij} \alpha_j = T_i \quad \text{su } F_t, \quad (2.29)$$

con σ_{ij} ricavabile dalle funzioni u_i tramite la legge di Hooke. La soluzione $u_i(x)$ si dice una *soluzione classica del problema di elasticità*.

2.3. Il principio dei lavori virtuali

Si consideri il corpo S , la cui frontiera F è partizionata in due parti. Sulla parte F_u sono assegnati gli spostamenti:

$$u_i = f_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.30)$$

mentre sulla restante parte di frontiera F_t sono assegnate le forze superficiali T_i , legate alle tensioni dalle equazioni di equilibrio:

$$\sigma_{ij} \alpha_j = T_i \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.31)$$

dove gli α_i sono i coseni direttori della normale uscente dal dominio.

Definizione 2.25: Un campo di tensioni simmetrico σ_{ij} si dice *staticamente ammissibile* se:

- 1) soddisfa le condizioni di equilibrio (2.1) in S
- 2) soddisfa le condizioni di equilibrio (2.31) su F_t .

Definizione 2.26: Un campo di spostamenti $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ si dice *geometricamente ammissibile* se soddisfa le condizioni di congruenza (2.30) su F_u .

Si può ora enunciare il:

Principio dei lavori virtuali - Sia $\sigma_{ij}(x)$ un campo di tensioni staticamente ammissibili, e sia $u(x)$ un campo di spostamenti geometricamente ammissibili. Si definiscano le quantità:

$$e_{ij}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.32)$$

Vale allora la seguente uguaglianza:

$$\int_S \sigma_{ij} e_{ij} dv = \int_S X_i u_i dv + \int_{F_t} T_i u_i ds + \int_{F_u} \sigma_{ij} \alpha_j f_i ds. \quad (2.33)$$

Dim. Sostituendo infatti la (2.32) nel primo membro della (2.33) si ottiene:

$$\int_S \sigma_{ij} e_{ij} dv = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) dv = \int_S \sigma_{ij} u_{i,j} dv \quad (2.34)$$

dove la derivazione è indicata da una virgola al pedice. Per il teorema di Green si può anche scrivere:

$$\int_S \sigma_{ij} u_{i,j} dv = \int_F \sigma_{ij} \alpha_j u_i ds - \int_S \sigma_{i,j,j} u_i dv \quad (2.35)$$

Usando le equazioni (2.1) e spezzando in due l'integrale di superficie si ottiene:

$$\int_S \sigma_{ij} u_{i,j} dv = \int_S X_i u_i dv + \int_{F_t} \sigma_{ij} \alpha_j u_i ds + \int_{F_u} \sigma_{ij} \alpha_j u_i ds \quad (2.36)$$

Usando le condizioni ai limiti su F_t e su F_u si ottiene l'uguaglianza.

Nota 2.1: Si esamini ora ciascuno degli integrali di cui è costituita la (2.33). Il primo integrale è il lavoro interno, ossia il lavoro delle forze interne per le corrispondenti deformazioni. Il secondo e terzo integrale sono il lavoro esterno, ossia il lavoro che forze di massa e forze superficiali compiono per gli spostamenti corrispondenti. Infine, il quarto integrale è il lavoro provocato da eventuali cedimenti anelastici dei vincoli. Il principio dei lavori virtuali può quindi essere enunciato nella forma alternativa:

“il lavoro virtuale interno di un campo di tensioni staticamente ammissibile per un campo di spostamenti geometricamente ammissibile, è uguale al lavoro virtuale esterno che le forze applicate compiono per lo stesso campo di spostamenti”.

Nota 2.2: Nell'enunciato del principio dei lavori virtuali non è ipotizzato alcun legame tra tensioni e deformazioni. Esso quindi vale per una qualsiasi distribuzione di tensioni — purchè staticamente ammissibile — e per una qualsiasi terna di spostamenti — purchè geometricamente ammissibili.

2.4. Il principio degli spostamenti virtuali

Si consideri ora la soluzione classica \bar{u}_i del problema di elasticità, che sarà ovviamente geometricamente ammissibile. Sia $\bar{\sigma}_{ij}$ il corrispondente campo di tensioni, staticamente ammissibile, e ricavabile da \bar{u}_i tramite una arbitraria legge.

Si definisca poi un ulteriore campo di spostamenti arbitrario $\bar{u}_i + \delta u_i$, supposto anch'esso geometricamente ammissibile. Tale campo può ottenersi aggiungendo alla soluzione classica lo *spostamento virtuale* (o *variazione*) δu_i . Poichè sia \bar{u}_i che $\bar{u}_i + \delta u_i$ sono geometricamente ammissibili, ne segue che la differenza δu_i deve soddisfare la condizione:

$$\delta u_i = 0 \quad \text{su } F_u. \quad (2.37)$$

Si scriva il principio dei lavori virtuali per $\bar{\sigma}_{ij}$ ed \bar{u}_i :

$$\int_S \bar{\sigma}_{ij} \bar{e}_{ij} dv = \int_S X_i \bar{u}_i dv + \int_{F_t} T_i \bar{u}_i ds + \int_{F_u} \bar{\sigma}_{ij} \alpha_j f_i ds. \quad (2.38)$$

e per $\bar{\sigma}_{ij}$ e $\bar{u}_i + \delta u_i$:

$$\int_S \bar{\sigma}_{ij} (\bar{e}_{ij} + \delta e_{ij}) dv = \int_S X_i (\bar{u}_i + \delta u_i) dv + \int_{F_t} T_i (\bar{u}_i + \delta u_i) ds + \int_{F_u} \bar{\sigma}_{ij} \alpha_j f_i ds. \quad (2.39)$$

con $\delta e_{ij} = e_{ij}(\delta u)$. Sottraendo la (2.38) dalla (2.39) si giunge al:

Principio degli spostamenti virtuali Sia $\bar{\sigma}_{ij}$ un campo di tensioni staticamente ammissibili, e sia δu_i un campo di spostamenti arbitrario, che soddisfi le condizioni omogenee (2.37). Vale la seguente uguaglianza:

$$\int_S \bar{\sigma}_{ij} \delta e_{ij} dv = \int_S X_i \delta u_i dv + \int_{F_t} T_i \delta u_i ds \quad (2.40)$$

Nota 2.3: Si sono quindi presupposte verificate a priori le condizioni di congruenza:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } S \quad (2.41)$$

$$u_i = f_i \quad \text{su } F_u \quad (2.42)$$

Sostituendo nella (2.40) la prima di queste relazioni si ottiene:

$$\frac{1}{2} \int_S \bar{\sigma}_{ij} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) dv = \int_S X_i \delta u_i dv + \int_{F_t} T_i \delta u_i ds \quad (2.43)$$

ed integrando per parti il primo integrale:

$$\begin{aligned} \int_{F_t} \bar{\sigma}_{ij} \delta u_i \alpha_j ds + \int_{F_u} \bar{\sigma}_{ij} \delta u_i \alpha_j ds - \int_S \bar{\sigma}_{ij,j} \delta u_i dv \\ - \int_S X_i \delta u_i dv - \int_{F_t} T_i \delta u_i ds = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Il secondo integrale svanisce perchè $\delta u_i \equiv 0$ su F_u e quindi la relazione precedente è valida se sono soddisfatte le condizioni di equilibrio:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad \text{in } S \quad (2.45)$$

$$\sigma_{ij} \alpha_i = T_i \quad \text{su } F_t \quad (2.46)$$

Come si vedrà, sul principio degli spostamenti virtuali si basa il cosiddetto *metodo dei cedimenti* dell'analisi strutturale.

2.5. Il principio delle forze virtuali

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, si consideri ora la soluzione effettiva del problema di elasticità $\bar{u}_i(x)$ ed il corrispondente campo di tensioni $\bar{\sigma}_{ij}(x)$, ottenuto dalle $\bar{u}_i(x)$ tramite una arbitraria legge.

Si supponga ora di assegnare una variazione $\delta\sigma_{ij}$ al campo di tensioni, arbitraria, ma tale che il campo di tensioni variato $\bar{\sigma}_{ij} + \delta\sigma_{ij}$ sia anch'esso staticamente ammissibile. Ciò vuol dire che le componenti delle tensioni virtuali $\delta\sigma_{ij}$ devono essere simmetriche, devono essere in equilibrio con forze di massa nulle:

$$\delta\sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{in } S \quad (2.47)$$

e devono soddisfare le condizioni ai limiti su F_t con forze superficiali nulle:

$$\delta\sigma_{ij} \alpha_j = 0 \quad \text{su } F_t \quad (2.48)$$

Scrivendo il p.l.v. per \bar{u}_i e $\bar{\sigma}_{ij}$ si riottiene la (2.38), mentre scrivendolo per \bar{u}_i e per $\bar{\sigma}_{ij} + \delta\sigma_{ij}$ si ha:

$$\int_S (\bar{\sigma}_{ij} + \delta\sigma_{ij}) \bar{e}_{ij} dv = \int_S X_i \bar{u}_i dv + \int_{F_t} T_i \bar{u}_i ds + \int_{F_u} (\bar{\sigma}_{ij} + \delta\sigma_{ij}) \alpha_j \bar{f}_i ds. \quad (2.49)$$

e sottraendo la (2.38) da questa si ottiene il:

Principio delle forze virtuali Sia \bar{u}_i un campo di spostamenti geometricamente ammissibili, e sia $\delta\sigma_{ij}$ un campo di tensioni arbitrario, che soddisfi le condizioni omogenee (2.47-48). Vale la seguente uguaglianza:

$$\int_S \delta\sigma_{ij} \bar{e}_{ij} dv = \int_{F_u} \delta\sigma_{ij} \alpha_j f_i ds. \quad (2.50)$$

Nota 2.4: In questo caso vengono presupposte valide a priori le condizioni di equilibrio (2.1) e (2.31). Usando l'identità di Gauss:

$$\frac{1}{2} \int_S \delta\sigma_{ij} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) dv = \int_F \delta\sigma_{ij} \alpha_j \bar{u}_i ds - \int_S \delta\sigma_{ij,j} \bar{u}_i dv \quad (2.51)$$

si giunge a scrivere:

$$\begin{aligned} \int_S \delta\sigma_{ij} \left(\bar{e}_{ij} - \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \right) dv - \int_S \delta\sigma_{ij,j} \bar{u}_i dv + \int_{F_u} \delta\sigma_{ij} \alpha_j (\bar{u}_i - f_i) ds \\ + \int_{F_t} \delta\sigma_{ij} \alpha_j \bar{u}_i ds = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Essendo valide le (2.47), (2.48), si deduce che usare il p.f.v. equivale ad imporre le condizioni di congruenza.

Il principio delle forze virtuali serve di base al cosiddetto *metodo delle forze* per il calcolo delle iperstatiche di una struttura staticamente indeterminata.

2.6. Il potenziale elastico

Si consideri ora un corpo elastico anisotropo, per cui valga la legge di Hooke generalizzata (2.2):

$$\sigma_{ij} = c_{ijhk} e_{hk} \quad (2.53)$$

o, all'inverso:

$$e_{ij} = a_{ijhk} \sigma_{hk} \quad (2.54)$$

Definizione 2.27: Si definisce *potenziale elastico* la forma quadratica nelle deformazioni:

$$W(e_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijhk} e_{ij} e_{hk} \quad (2.55)$$

o, equivalentemente, la forma quadratica nelle tensioni:

$$W(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} a_{ijhk} \sigma_{ij} \sigma_{hk} \quad (2.56)$$

Il potenziale elastico gode, *per definizione*, delle due proprietà seguenti:

- 1) è una forma quadratica definita positiva
- 2) è una forma quadratica *uniformemente definita positiva* in S, ossia esiste una costante $c_0 > 0$, tale che:

$$W(e_{ij}) = \frac{1}{2} c_{ijhk} e_{ij} e_{hk} \geq \frac{1}{2} c_0 e_{ij} e_{ij} \quad (2.57)$$

o, equivalentemente, esiste una costante $a_0 > 0$ tale che:

$$W(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} a_{ijhk} \sigma_{ij} \sigma_{hk} \geq \frac{1}{2} a_0 \sigma_{ij} \sigma_{ij} \quad (2.58)$$

Esempio 2.1: - Se il corpo è isotropo, il potenziale elastico può scriversi, utilizzando la legge di Hooke (2.5):

$$W(e_{ij}) = \frac{1}{2} \lambda \vartheta^2 + \mu e_{ij} e_{ij} \quad (2.59)$$

e quindi l'ipotesi 2) equivale a postulare che $\lambda \geq 0$, e che esista una costante $\mu_0 > 0$ tale che $\mu(x) \geq \mu_0$ quasi ovunque nel corpo.

Definizione 2.28: La variazione prima del potenziale elastico $W(e_{ij}(u))$, rispetto ad u , è fornita da:

$$\delta W(e_{ij}(u)) = \frac{d}{dt} W(e_{ij}(u + t\delta u))|_{t=0} \quad (2.60)$$

Può dimostrarsi ora il:

Teorema 2.2: La variazione prima del potenziale elastico è pari a:

$$\delta W(e_{ij}(u)) = c_{ijhk} e_{ij}(u) e_{hk}(\delta u) = c_{ijhk} e_{ij} \delta e_{hk} \quad (2.61)$$

DIM. - Dalla definizione si ha, infatti:

$$\begin{aligned} W(e_{ij}(u + t\delta u)) &= \frac{1}{2} c_{ijhk} (e_{ij} + t\delta e_{ij})(e_{hk} + t\delta e_{hk}) \\ &= \frac{1}{2} c_{ijhk} e_{ij} e_{hk} + t c_{ijhk} e_{ij} \delta e_{hk} + \frac{1}{2} t^2 c_{ijhk} \delta e_{ij} \delta e_{hk} \end{aligned} \quad (2.62)$$

e la derivata rispetto a t , valutata in $t = 0$ fornisce l'asserto

Nota 2.5: Se il potenziale è espresso in termini di tensioni, allora la sua variazione prima è fornita da:

$$\delta W(\sigma_{ij}) = a_{ijhk} \sigma_{ij} \delta \sigma_{hk} \quad (2.63)$$

Definizione 2.29: Si definisce *energia elastica* del corpo S l'integrale esteso a tutto il corpo del potenziale elastico, espresso in funzione degli spostamenti:

$$L = L(u_i) = \int_S W(e_{ij}) dv = \frac{1}{2} \int_S c_{ijhk} e_{ij} e_{hk} dv \quad (2.64)$$

Definizione 2.30: Si definisce *energia complementare* del corpo S l'integrale esteso a tutto il corpo del potenziale elastico, espresso in funzione delle tensioni:

$$L_1 = L_1(\sigma_{ij}) = \int_S W(\sigma_{ij}) dv = \frac{1}{2} \int_S a_{ijhk} \sigma_{ij} \sigma_{hk} dv \quad (2.65)$$

In ipotesi di validità della legge di Hooke si ha, ovviamente, $L = L_1$, mentre in regime non lineare tale uguaglianza cade in difetto.

2.7. Il principio di minimo dell'energia potenziale totale

Il principio degli spostamenti virtuali è valido per una arbitraria equazione costitutiva. Se invece il corpo è elastico, ed obbedisce alla legge di Hooke generalizzata, allora il principio degli spostamenti virtuali può particolarizzarsi come segue.

Si usi la legge di Hooke nel primo integrale della (2.40):

$$\int_S c_{ijhk} \bar{e}_{hk} \delta e_{ij} dv - \int_S X_i \delta u_i dv - \int_{F_t} T_i \delta u_i ds \quad (2.66)$$

Ma il primo integrando è la variazione prima del potenziale elastico (2.55), e quindi il p.s.v. diviene:

$$\delta \left\{ \int_S W(e_{ij}) dv - \int_S X_i u_i dv - \int_{F_t} T_i u_i ds \right\} \quad (2.67)$$

Definendo *energia potenziale totale* del corpo S il seguente funzionale degli spostamenti u_i :

$$F(u_i) = \int_S W(e_{ij}) dv - \int_S X_i u_i dv - \int_{F_t} T_i u_i ds \quad (2.68)$$

il principio degli spostamenti virtuali per solidi elastici anisotropi può esprimersi dicendo che il funzionale energia potenziale totale è stazionario in corrispondenza della

soluzione \bar{u}_i del problema classico di elasticità. Sfruttando poi l'ipotesi di potenziale uniformemente definito positivo si può ulteriormente precisare la natura del punto di stazionarietà, giungendo al:

Principio di minimo dell'energia potenziale totale . La soluzione \bar{u}_i del problema classico di elasticità fa assumere al funzionale $F(u_i)$ dell'energia potenziale totale il suo minimo valore su tutto l'insieme degli spostamenti geometricamente ammissibili (congruenti).

DIM. Che \bar{u}_i sia punto di stazionarietà lo si è evinto già in precedenza. Per studiare la natura di questo punto di stazionarietà si esamini la differenza:

$$F(\bar{u}_i + \delta u_i) - F(\bar{u}_i) \quad (2.69)$$

dove anche $(\bar{u}_i + \delta u_i)$ è un campo di spostamenti congruente.

Si ha, per definizione:

$$\begin{aligned} F(\bar{u}_i + \delta u_i) - F(\bar{u}_i) &= \int_S W(e_{ij}(\bar{u} + \delta u)) dv - \int_S X_i(\bar{u}_i + \delta u_i) dv \\ &- \int_{F_u} T_i(\bar{u}_i + \delta u_i) ds - \int_S W(e_{ij}(\bar{u})) dv + \int_S X_i \bar{u}_i dv + \int_{F_u} T_i \bar{u}_i ds \\ &= \int_S c_{ijhk} e_{ij} \delta e_{hk} dv + \frac{1}{2} \int_S c_{ijhk} \delta e_{ij} \delta e_{hk} dv - \int_S X_i \delta u_i dv - \int_{F_u} T_i \delta u_i ds \end{aligned} \quad (2.70)$$

Essendo \bar{u}_i un punto di stazionarietà, questa differenza si riduce ad un solo termine, positivo per la proprietà del potenziale elastico:

$$F(\bar{u}_i + \delta u_i) - F(u_i) = \frac{1}{2} \int_S c_{ijhk} \delta e_{ij} \delta e_{hk} dv \geq \frac{1}{2} c_0 \int_S \delta e_{ij} \delta e_{ij} dv > 0 \quad (2.71)$$

e quindi \bar{u}_i è un punto di minimo.

2.8. Il principio di minimo dell'energia complementare totale

Analogamente a quanto dedotto per il p.s.v. in ipotesi di validità della legge di Hooke generalizzata, è possibile manipolare il p.f.v., ed ottenere così il principio di minimo dell'energia complementare.

Si parta dalla distribuzione reale di spostamenti \bar{u}_i , geometricamente ammissibile, e si scriva il principio delle forze virtuali:

$$\int_S \delta \sigma_{ij} \bar{e}_{ij} dv - \int_{F_u} \delta \sigma_{ij} \alpha_j f_i ds = 0. \quad (2.72)$$

Sfruttando, nel primo integrale, la legge di Hooke (2.54), si ottiene:

$$\int_S a_{ijhk} \delta \sigma_{hk} \bar{\sigma}_{ij} dv - \int_{F_u} \delta \sigma_{ij} \alpha_j f_i ds = 0. \quad (2.73)$$

Ma il primo integrale è la variazione prima del potenziale elastico, e quindi il principio delle forze virtuali, in ipotesi di materiale elastico anisotropo, si scrive:

$$\delta \left\{ \int_S W(\sigma_{ij}) dv - \int_{F_u} \sigma_{ij} \alpha_j f_i ds \right\} = 0. \quad (2.74)$$

Definendo *energia complementare totale* del corpo S il funzionale $S(\sigma_{ij})$ delle tensioni σ_{ij} :

$$S(\sigma_{ij}) = \int_S W(\sigma_{ij}) dv - \int_{F_u} \sigma_{ij} \alpha_j f_i ds \quad (2.75)$$

il principio delle forze virtuali, per solidi elastici anisotropi, può esprimersi dicendo che l'energia complementare totale è stazionaria in corrispondenza della soluzione $\bar{\sigma}_{ij}$ del problema classico di elasticità. Analogamente a quanto visto per il principio di minimo dell'energia potenziale totale, è possibile sfruttare la proprietà del potenziale elastico di essere uniformemente definito positivo, per giungere al:

Principio di minimo dell'energia complementare totale. Il funzionale $S(\sigma_{ij})$ dell'energia complementare totale assume il suo minimo valore su tutto l'insieme delle tensioni staticamente ammissibili (equilibrate), in corrispondenza della soluzione $\bar{\sigma}_{ij}$ del problema classico di elasticità.

DIM. Ovvio, seguendo lo schema della dimostrazione del principio di minimo della energia potenziale totale.

2.9. Alcuni confronti

I due principi variazionali fin qui proposti sono, per molti versi, da considerarsi duali. Il primo discende dal p.s.v., che presuppone verificate a priori le condizioni:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in S} \quad (2.76)$$

$$u_i = f_i \quad \text{su } F_u \quad (2.77)$$

Inoltre è imposta a priori la legge di Hooke generalizzata. Se ne ricava un funzionale della funzione spostamento u_i , e la ricerca del minimo si fa nell'ambito delle

configurazioni congruenti. In altre parole, si ricerca, tra tutte le configurazioni congruenti, quell'unica configurazione che sia anche equilibrata. Il secondo principio discende dal p.f.v., che presuppone verificate a priori le condizioni di equilibrio:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad \text{in } S \quad (2.78)$$

$$\sigma_{ij}\alpha_j = T_i \quad \text{su } F_t \quad (2.79)$$

Anche in questo caso è imposta la legge di Hooke. Se ne ricava un funzionale delle tensioni σ_{ij} . Si ricerca, in questo caso, nell'ambito delle configurazioni equilibrate, quell'unica configurazione che sia anche congruente.

2.10. I teoremi di Castigliano

Si consideri una struttura soggetta alle forze concentrate P_i , e si definisca uno spostamento virtuale δs_k continuo, e nullo in corrispondenza dei punti di applicazione di tutte le forze, salvo la k -ma. Di conseguenza, il lavoro virtuale esterno si riduce a $P_k \delta s_k$, ed il p.s.v. si scrive:

$$\delta L = P_k \delta s_k \quad (2.80)$$

ed al limite:

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial s_k} \quad (2.81)$$

Se invece di una forza si è in presenza di una coppia concentrata \mathcal{M}_k , si giunge alla relazione:

$$\mathcal{M}_k = \frac{\partial L}{\partial \varphi_k} \quad (2.82)$$

Si è così dimostrato il:

Teorema 2.3: Primo teorema di Castigliano - Si consideri il corpo S soggetto ad un insieme di forze (e coppie) concentrate Q_i . Se l'energia elastica L è espressa in funzione dei corrispondenti spostamenti (e rotazioni) q_i , si ha:

$$Q_m = \frac{\partial L}{\partial q_m} \quad (2.83)$$

Nota 2.6: Il teorema di Castigliano si basa sul p.s.v., e quindi è valido anche in regime non lineare, e per una qualsiasi legge costitutiva.

Si definisca ora un incremento virtuale δP_k della forza k -ma, che causa un incremento virtuale δL_1 dell'energia complementare. Il p.f.v. si scrive:

$$\delta L_1 = \delta P_k s_k \quad (2.84)$$

ed al limite:

$$s_k = \frac{\partial L_1}{\partial P_k} \quad (2.85)$$

Se si è in presenza di una coppia concentrata \mathcal{M}_k , allora la formula precedente diviene:

$$\phi_k = \frac{\partial L_1}{\partial \mathcal{M}_k} \quad (2.86)$$

Si è così dimostrato il:

Teorema 2.4: Secondo teorema di Castigliano - Si consideri il corpo S soggetto ad un insieme di forze (e coppie) concentrate Q_i . Se l'energia complementare L_1 è espressa in funzione di queste forze, si ha:

$$q_m = \frac{\partial L_1}{\partial Q_m} \quad (2.87)$$

dove q_m è lo spostamento (rotazione) corrispondente alla forza (coppia) Q_m .

Nota 2.7: Il secondo teorema di Castigliano si basa sul p.f.v., ed è valido in regime lineare, poichè si è ipotizzato che il lavoro della forza fosse esprimibile come energia complementare.

2.11. I funzionali ibridi

Se si vuole condurre la ricerca della soluzione in uno spazio più ampio di quanto descritto in precedenza, si possono allargare i funzionali dell'energia potenziale totale e dell'energia complementare, introducendo opportuni moltiplicatori di Lagrange, ed eliminare del tutto o in parte le condizioni ausiliarie. Se ad esempio si parte dal funzionale dell'e.p.t., e si eliminano ambedue le condizioni ausiliarie di congruenza, si devono introdurre i moltiplicatori di Lagrange λ_{ij} e μ_i , definendo il nuovo funzionale allargato:

$$\begin{aligned} H(u_i, e_{ij}, \lambda_{ij}, \mu_i) = & \frac{1}{2} \int_S c_{ijhk} e_{ij} e_{hk} dv + \int_S \lambda_{ij} \left(\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - e_{ij} \right) dv \\ & - \int_S X_i u_i dv - \int_{F_t} T_i u_i ds + \int_{F_u} \mu_i (f_i - u_i) ds \end{aligned} \quad (2.88)$$

Se si annulla la variazione prima di questo funzionale, rispetto a tutti i suoi quattro argomenti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta H(u_i, e_{ij}, \lambda_{ij}, \mu_i) &= \int_S c_{ijhk} e_{ij} \delta e_{hk} dv + \int_S \delta \lambda_{ij} \left(\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - e_{ij} \right) dv \\ &+ \frac{1}{2} \int_S \lambda_{ij} \delta u_{i,j} dv + \frac{1}{2} \int_S \lambda_{ij} \delta u_{j,i} dv - \int_S \lambda_{ij} \delta e_{ij} dv - \int_S X_i \delta u_i dv \\ &- \int_{F_t} T_i \delta u_i ds + \int_{F_u} \delta \mu_i (f_i - u_i) ds - \int_{F_u} \mu_i \delta u_i ds \end{aligned} \quad (2.89)$$

Il terzo e quarto integrale possono essere trasformati, tramite integrazione per parti, e quindi la variazione prima è data da:

$$\begin{aligned} \delta H &= \int_S (c_{ijhk} e_{hk} - \lambda_{ij}) \delta e_{ij} dv - \int_S (\lambda_{ij,j} + X_i) \delta u_i dv \\ &+ \int_S \left(\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - e_{ij} \right) \delta \lambda_{ij} dv + \int_{F_t} (\lambda_{ij} \alpha_j - T_i) \delta u_i ds \\ &+ \int_{F_u} (\lambda_{ij} \alpha_j - \mu_i) \delta u_i ds + \int_{F_u} \delta \mu_i (f_i - u_i) ds = 0 \end{aligned} \quad (2.90)$$

Poichè le variazioni δe_{ij} , $\delta \lambda_{ij}$, δu_i e $\delta \mu_i$ sono arbitrarie, occorrerà che siano verificate le relazioni seguenti:

$$\lambda_{ij} = c_{ijhk} e_{hk} \quad \text{in } S \quad (2.91)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } S \quad (2.92)$$

$$\lambda_{ij,j} + X_i = 0 \quad \text{in } S \quad (2.93)$$

$$\lambda_{ij} \alpha_j = T_i \quad \text{su } F_t \quad (2.94)$$

$$f_i = u_i \quad \text{su } F_u \quad (2.95)$$

$$\lambda_{ij} \alpha_j = \mu_i \quad \text{su } F_u \quad (2.96)$$

Se ne può dedurre che λ_{ij} gioca il ruolo del tensore σ_{ij} delle tensioni, mentre μ_i sono le forze superficiali su F_u .

Non avendo μ_i un significato immediato, lo si può eliminare dal funzionale, usando la relazione (2.96). Scrivendo anche σ_{ij} invece di λ_{ij} si giunge al *funzionale di Hu-Washizu* [Washizu 1982]:

$$H(u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}) = \int_S \left[\frac{1}{2} c_{ijhk} e_{ij} e_{hk} - \sigma_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) - X_i u_i \right] dv - \int_{F_t} T_i u_i ds + \int_{F_u} \sigma_{ij} \alpha_i (f_i - u_i) ds \quad (2.97)$$

la cui utilità risiede nel seguente:

Principio di Hu-Washizu - La terna di funzioni $(\bar{u}_i, \bar{e}_{ij}, \bar{\sigma}_{ij})$ che rende stazionario il funzionale di Hu-Washizu, soddisfa tutte le relazioni del problema di elasticità, ossia le equazioni di equilibrio, le equazioni di congruenza, e la legge di Hooke, e quindi è una soluzione del problema classico

DIM. Basta annullare la variazione prima del funzionale

Nota 2.8: Il principio variazionale precedente non assume nulla di verificato *a priori*, e quindi la ricerca della configurazione equilibrata e congruente viene condotta nello spazio più ampio possibile. Se invece la legge di Hooke è imposta *a priori*, si può eliminare facilmente il tensore e_{ij} dal funzionale di Hu-Washizu, giungendo alla *prima forma del funzionale di Hellinger-Reissner* [Reissner 1950]:

$$R_1(u_i, \sigma_{ij}) = \int_S \left(-\frac{1}{2} a_{ijhk} \sigma_{ij} \sigma_{hk} + \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) - X_i u_i \right) dv - \int_{F_t} T_i u_i ds + \int_{F_u} \sigma_{ij} \alpha_i (f_i - u_i) ds \quad (2.98)$$

Può anche imporsi *a priori* la relazione deformazioni-spostamenti:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } S \quad (2.99)$$

giungendo alla *seconda forma del funzionale di Hellinger-Reissner*:

$$R_2(u_i, \sigma_{ij}) = \int_S \left(\frac{1}{8} c_{ijhk} (u_{i,j} + u_{j,i}) (u_{h,k} + u_{k,h}) - X_i u_i \right) dv - \int_{F_t} T_i u_i ds + \int_{F_u} \sigma_{ij} \alpha_i (f_i - u_i) ds \quad (2.100)$$

Valgono i seguenti:

Primo principio di Hellinger–Reissner - La condizione di stazionarietà del funzionale R_1 di Hellinger–Reissner implica, nell'ambito delle funzioni che rispettano la legge di Hooke, che la coppia $(\bar{u}_i, \bar{\sigma}_{ij})$ soddisfi le condizioni di equilibrio e congruenza, interne ed esterne, e quindi è soluzione del problema classico di elasticità.

Secondo principio di Hellinger–Reissner - La condizione di stazionarietà del funzionale R_2 di Hellinger–Reissner implica, nell'ambito delle funzioni che rispettano la condizione di congruenza interna (2.99), che la coppia $(\bar{u}_i, \bar{\sigma}_{ij})$ soddisfi le condizioni di congruenza esterna, le condizioni di equilibrio e la legge di Hooke, e quindi è soluzione del problema classico di elasticità.

DIM . Anche in questo caso, basta annullare la variazione prima del funzionale

Nota 2.9: La natura del punto di stazionarietà $(\bar{u}_i, \bar{\sigma}_{ij})$ del funzionale di Hellinger–Reissner può essere ulteriormente specificata, tramite il:

Principio di sella del funzionale di Hellinger–Reissner - Sia U l'insieme degli spostamenti congruenti, e sia Q l'insieme delle tensioni simmetriche. La soluzione $(\bar{u}_i, \bar{\sigma}_{ij})$ del problema classico di elasticità è tale che:

$$R_i(\bar{u}_i, \bar{\sigma}_{ij}) = \min_{u \in U} \max_{\sigma \in Q} R_i(u_i, \sigma_{ij}) = \max_{\sigma \in Q} \min_{u \in U} R_i(u_i, \sigma_{ij}) \quad (2.101)$$

dove i può essere pari ad 1 o a 2.

DIM. Si veda ad esempio Nečas e Hlavaček [1981]

2.12. Sviluppi recenti

I funzionali ibridi fin qui introdotti sono stati utilizzati in larga parte nello studio dei solidi quasi incompressibili ($\nu \simeq 0.5$, e quindi $\lambda \gg \mu$), e nell'analisi agli elementi finiti di strutture ad arco.

In quest'ultimo caso, ad esempio, l'uso del principio di minimo dell'energia potenziale totale porta a calcolare con buona approssimazione gli spostamenti nodali, ma il regime tensionale non viene ottenuto con sufficiente precisione [Dawe 1974], mentre risultati molto migliori sono stati dedotti usando il principio di Hellinger–Reissner [Gellert et al. 1976, Loula et al. 1987, Benedetti et al. 1989].

Tuttavia i metodi variazionali ibridi richiedono un impegno computazionale molto maggiore, e — come si è visto — occorre ricercare un punto sella, e non un punto di minimo. Ciò richiede l'uso di tecniche particolari [ad es. Mirza 1984], che comunque risultano molto onerose da un punto di vista computazionale.

Si è allora recentemente cercato di trasformare i principi ibridi di stazionarietà in principi di minimo. Slivker [1982] ha proposto un funzionale ibrido pari alla somma del funzionale di Hellinger–Reissner e dell'energia potenziale, dimostrando che il punto

di stazionarietà di questo funzionale è un punto di minimo. Rong [1988], combinando l'energia potenziale e l'energia complementare raggiunge soluzioni più accurate di quanto non si possa con gli altri metodi.

Infine, Lee e Lee [1990] hanno proposto un nuovo funzionale, ottenuto dalla combinazione del funzionale di Hellinger–Reissner e dell'energia potenziale totale, dimostrando che il punto di stazionarietà di questo funzionale è un punto di minimo. Dando quindi per verificate a priori le relazioni tra spostamenti e deformazioni (2.99), il funzionale di Lee e Lee è dato da:

$$J_M = \frac{\alpha}{\alpha - 1} F(u_i) - \frac{1}{\alpha - 1} R_1(u_i, \sigma_{ij}) \quad (2.102)$$

con α costante arbitraria non uguale ad 1.

Può dimostrarsi il:

Principio di stazionarietà di Lee e Lee - La condizione di stazionarietà del funzionale J_M di Lee e Lee implica, nell'ambito delle configurazioni che soddisfano la condizione (2.99), che la coppia $(\bar{u}_i, \bar{\sigma}_{ij})$ soddisfi la legge di Hooke, le condizioni di congruenza esterna, e le condizioni di equilibrio, risultando quindi soluzione del problema classico di elasticità

DIM. La variazione prima del funzionale J_M è data da:

$$\begin{aligned} \delta J_M = & \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left[\int_S c_{ijhk} e_{ij} \delta u_{h,k} dv - \int_S X_i \delta u_i dv - \int_{F_t} T_i \delta u_i ds \right] \\ & - \frac{1}{\alpha - 1} \left[\int_S (\delta u_{i,j} \sigma_{ij} + e_{ij} \delta \sigma_{ij} - a_{ijhk} \sigma_{ij} \delta \sigma_{hk} - X_i \delta u_i) dv \right. \\ & \left. - \int_{F_t} T_i \delta u_i ds + \int_{F_u} \delta \sigma_{ij} \alpha_j (f_i - u_i) ds - \int_{F_u} \sigma_{ij} \alpha_j \delta u_i ds \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.103)$$

Applicando la formula di Green e raggruppando i termini in δu_i e $\delta \sigma_{ij}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta J_M = & -\frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_S [(c_{ijhk} e_{hk})_{,j} + X_i] \delta u_i dv + \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{F_t} (c_{ijhk} e_{hk} \alpha_j - T_i) \delta u_i ds \\ & + \frac{\alpha}{\alpha - 1} \int_{F_u} c_{ijhk} e_{hk} \alpha_j \delta u_i ds + \frac{1}{\alpha - 1} \left[\int_S (\sigma_{ij,j} + X_i) \delta u_i dv \right. \\ & + \int_S (a_{ijhk} \sigma_{hk} - e_{ij}) \delta \sigma_{ij} dv + \int_{F_t} (T_i - \sigma_{ij} \alpha_j) \delta u_i ds \\ & \left. + \int_{F_u} \sigma_{ij} \alpha_j \delta u_i ds - \int_{F_u} \delta \sigma_{ij} \alpha_j (f_i - u_i) ds + \int_{F_t} \sigma_{ij} \alpha_j \delta u_i ds \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.104)$$

e quindi l'asserto.

Nota 2.10: Si può ulteriormente dimostrare che il punto di stazionarietà è un punto di minimo, o equivalentemente, che il funzionale J_M è definito positivo. (Si veda Lee et al. 1990).

2.13. Esempi

Si vedrà che i principi variazionali fin qui introdotti rivestono un'importanza fondamentale nei metodi approssimati (del tipo di Rayleigh–Ritz, Galerkin, elementi finiti, etc.). Tuttavia si rivelano spesso molto utili anche nella derivazione di equazioni di equilibrio e congruenza per specifiche classi di strutture.

Nel seguito si forniscono alcuni esempi di tali applicazioni.

2.13.1. Applicazione del principio degli spostamenti virtuali alle travi di Eulero–Bernoulli simmetriche

Si consideri una trave rettilinea di asse z , con sezione retta caratterizzata da un asse di simmetria, e si supponga che la trave sia caricata da una stesa di carico verticale $p(z)$ e da una stesa di carico assiale $t(z)$. Le ipotesi a base della teoria di Eulero–Bernoulli sono, come noto:

- 1) gli spostamenti verticali $v(z)$ ed assiali $w(z)$ sono funzioni della sola variabile z
- 2) segmenti normali all'asse si conservano segmenti a seguito della deformazione, ed in più restano normali all'asse deformato (Figura 2.1)

Il baricentro di una generica sezione retta subisce gli spostamenti $w_0(z)$ e $v(z)$, e ruota di un angolo φ , che è lo stesso angolo di cui ruota l'asse. Pertanto, tale angolo è fornito da

$$\varphi = -\frac{dv}{dz} = -v'(z) \quad (2.105)$$

Ne segue che lo spostamento assiale $w(z)$ di un punto generico della sezione retta, a distanza y dal baricentro, è pari a:

$$w(z) = w_0(z) - yv'(z) \quad (2.106)$$

Il vettore \mathbf{u} degli spostamenti è fornito pertanto da:

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\} = \{0, v(z), w_0(z) - yv'(z)\} \quad (2.107)$$

Il tensore delle deformazioni è deducibile a partire dalle relazioni che legano le e_{ij} alle derivate prime degli spostamenti, ed è facile realizzare che l'unica componente non nulla di deformazione è:

$$e_{33} = w'_0 - yv''(z) \quad (2.108)$$

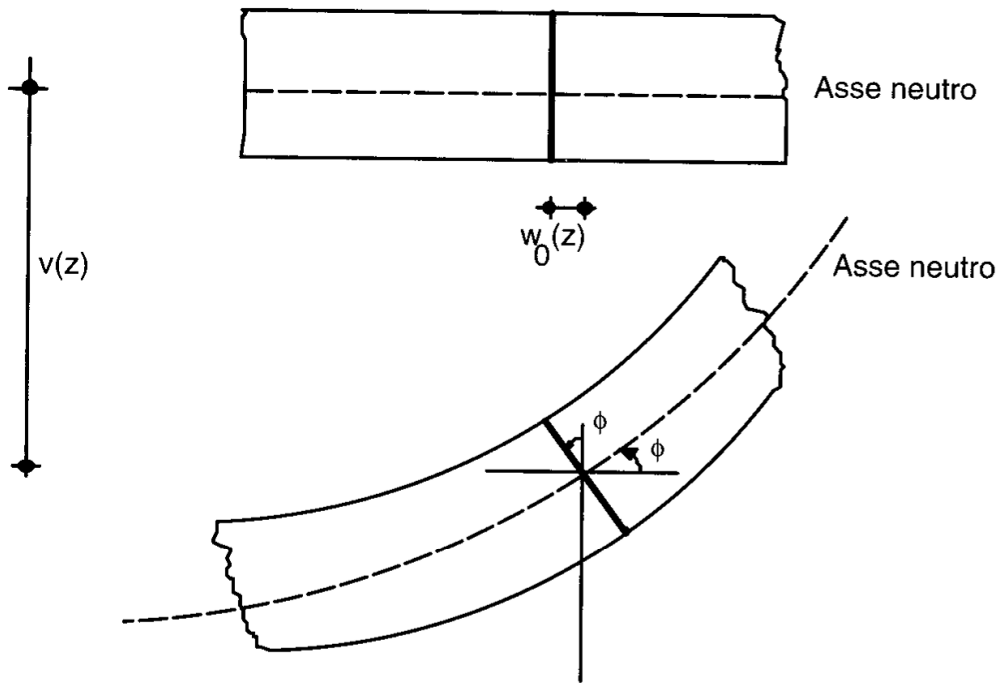


Figura 2.1- L'ipotesi di Eulero-Bernoulli per travi snelle

Il p.s.v. si scrive:

$$\int_S \sigma_{33} \delta e_{33} dv = \int_0^L p(z) \delta v dz + \int_0^L t(z) \delta w_0 dz \quad (2.109)$$

ossia ancora, usando la legge di Hooke, e la (2.108):

$$\int_0^L \int_A E (w'_0 - yv'') (\delta w'_0 - y\delta v'') dAdz = \int_0^L p(z) \delta v dz + \int_0^L t(z) \delta w_0 dz \quad (2.110)$$

Svolgendo i prodotti, tenendo conto che:

$$\int_A y dA = 0 \quad \int_A y^2 da = I \quad (2.111)$$

dove I è il momento di inerzia della sezione retta, si ottiene:

$$\int_0^L (EA w'_0 \delta w'_0 + EI v'' \delta v'' - p \delta v - t \delta w_0) dz = 0 \quad (2.112)$$

Il secondo integrale può essere integrato per parti due volte, ottenendo:

$$\begin{aligned}\int_0^L v'' \delta v'' dz &= [v'' \delta v']_0^L - \int_0^L v''' \delta v' dz \\ &= [v'' \delta v']_0^L - [v''' \delta v]_0^L + \int_0^L v'''' \delta v dz\end{aligned}\tag{2.113}$$

mentre il primo integrale può essere integrato per parti una volta:

$$\int_0^L w'_0 \delta w'_0 dz = [w'_0 \delta w_0]_0^L - \int_0^L w''_0 \delta w_0 dz\tag{2.114}$$

Inserendo ambedue questi risultati nell'espressione del p.s.v. si giunge a:

$$\begin{aligned}\int_0^L [(-EAw''_0 - t) \delta w_0 + (EIV'''' - p) \delta v] \\ + [EAw'_0 \delta w_0 + EIV'' \delta v' - EIV''' \delta v]_0^L = 0\end{aligned}\tag{2.115}$$

Le variazioni δv e δw_0 sono arbitrarie, e quindi occorrerà che siano nulli i termini tra parentesi. Si ha quindi:

$$EAw''_0 + t = 0 \quad EIV'''' = p\tag{2.116}$$

ossia le classiche equazioni differenziali della linea elastica. Le condizioni ai limiti sono fornite dall'annullarsi dei termini finiti. Se ad esempio l'estremo $z = L$ è libero, allora $\delta v \neq 0$ e $\delta v' \neq 0$. Ne segue che dovrà essere $EIV''(L) = 0$ ed $EIV'''(L) = 0$.

Nota 2.11: Può essere interessante osservare che, nelle ipotesi fatte, le due equazioni differenziali su dedotte sono disaccoppiate, e che quindi è possibile studiare i problemi di flessione e taglio ignorando lo sforzo assiale

2.13.2. Applicazione del principio degli spostamenti virtuali alle travi di Eulero-Bernoulli non simmetriche

Si consideri ora una trave di Eulero-Bernoulli di luce L , a sezione retta arbitraria (Figura 2.2).

Il carico è costituito da una stesa di carico verticale p_y ed una stesa di carico orizzontale p_x . Ogni punto della trave subisce gli spostamenti verticali $v(z)$ ed orizzontali $u(z)$. Nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, lo spostamento w di un punto della sezione retta, di coordinate (x, y, z) è fornito da:

$$w(x, y, z) = -yv' - xu'\tag{2.117}$$

e quindi l'unica componente di deformazione non nulla è pari a:

$$e_{33} = -yv'' - xu''\tag{2.118}$$

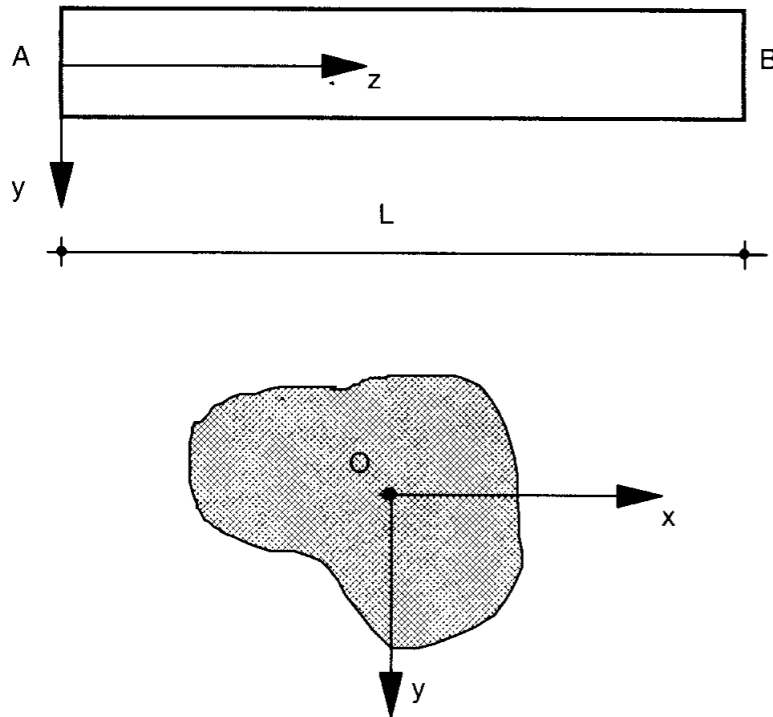


Figura 2.2- Trave snella a sezione retta arbitraria

Il p.s.v. si scrive:

$$\int_S \sigma_{33} \delta e_{33} dv = \int_0^L (p_x \delta u + p_y \delta v) dz \quad (2.119)$$

ossia ancora, usando la legge di Hooke:

$$\int_0^L \int_A E (-yv'' - xu'') (-y\delta v'' - x\delta u'') dAdz = \int_0^L (p_x \delta u + p_y \delta v) dz \quad (2.120)$$

Svolgendo i prodotti, e tenendo conto che:

$$\int_A x dA = 0 \quad \int_A y da = 0 \quad (2.121)$$

$$\int_A x^2 dA = I_{yy} \quad \int_A y^2 da = I_{xx} \quad \int_A xy dA = I_{xy} \quad (2.122)$$

il primo membro diviene:

$$\int_0^L [EI_{xx}v''\delta v'' + EI_{xy}(v''\delta u'' + u''\delta v'') + EI_{yy}u''\delta u''] dz \quad (2.123)$$

ed integrando per parti si giunge a:

$$\begin{aligned} \int_0^L [EI_{xx}v''''\delta v + EI_{xy}(v''''\delta u + u''''\delta v) + EI_{yy}u''''\delta u] dz \\ + [EI_{xx}v''\delta v' - EI_{xx}v'''\delta v + EI_{xy}v''\delta u' - EI_{xy}v'''\delta u \\ + EI_{xy}u''\delta v' - EI_{xy}u'''\delta v + EI_{yy}u''\delta u' - EI_{yy}u'''\delta u]_0^L \end{aligned} \quad (2.124)$$

Le equazioni di equilibrio si ottengono annullando i termini moltiplicati per δu e δv , rispettivamente, e quindi si giunge alle due equazioni accoppiate:

$$EI_{xx}v'''' + EI_{xy}u'''' = p_y \quad (2.125)$$

$$EI_{yy}u'''' + EI_{xy}v'''' = p_x \quad (2.126)$$

Le condizioni ai limiti si ottengono dall'esame dei termini finiti generati tramite integrazione per parti. Se ad esempio l'estremo $z = L$ è completamente libero, sarà $\delta u \neq 0$, $\delta v \neq 0$, $\delta u' \neq 0$ e $\delta v' \neq 0$, e di conseguenza dovrà essere:

$$EI_{xx}v''(L) + EI_{xy}u''(L) = 0 \quad (2.127)$$

$$EI_{xy}v''(L) + EI_{yy}u''(L) = 0 \quad (2.128)$$

$$EI_{xx}v'''(L) + EI_{xy}u'''(L) = 0 \quad (2.129)$$

$$EI_{xy}v'''(L) + EI_{yy}u'''(L) = 0 \quad (2.130)$$

Se $p_x = 0$, allora dalla seconda equazione di equilibrio può ricavarsi:

$$u'''' = -\frac{I_{xy}}{I_{yy}}v'''' \quad (2.131)$$

che sostituita nella prima equazione permette di riottenere l'equazione classica della linea elastica:

$$E\hat{I}v'''' = p \quad (2.132)$$

con un momento d'inerzia \hat{I} fittizio:

$$\hat{I} = I_{xx} \left(1 - \frac{I_{xy}^2}{I_{xx}I_{yy}} \right) \quad (2.133)$$

2.13.3. Applicazione del principio delle forze virtuali alle travi su suolo elastico

Si consideri la trave su suolo elastico di Figura 2.3, di luce L , soggetta ad un carico distribuito $q(z)$ e ad una reazione del terreno pari a $p(z) = k(z)v(z)$, con $k(z)$ modulo di Winkler.

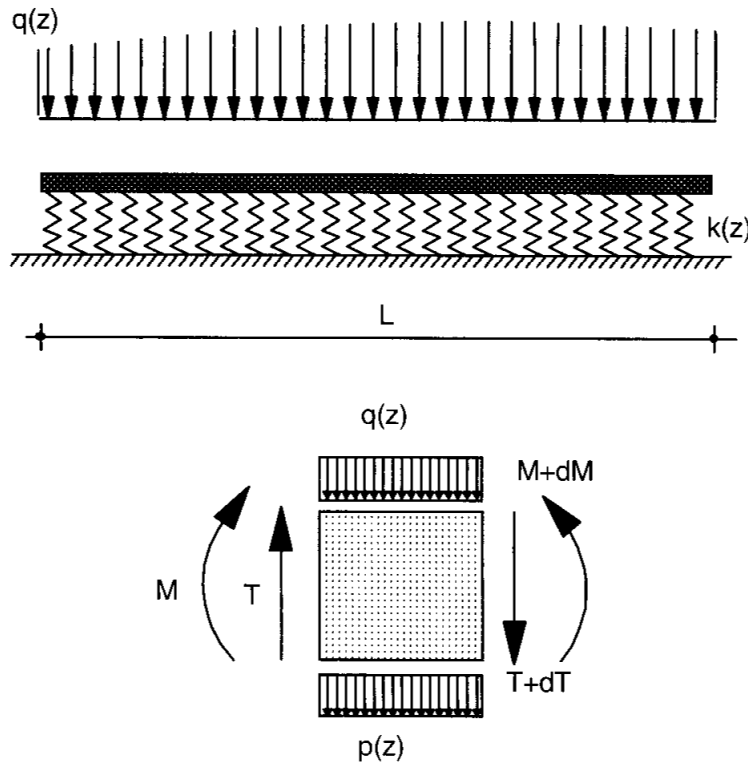


Figura 2.3- Trave su suolo elastico alla Winkler

Enucleando un elemento di trave, si hanno le equazioni di equilibrio:

$$\frac{dT}{dz} + p + q = 0 \tag{2.134}$$

e:

$$\frac{dM}{dz} = T \tag{2.135}$$

Il lavoro virtuale è fornito da due aliquote:

$$L_i^1 = \int_S \delta\sigma_{33}e_{33}dz = \int_0^L \frac{M\delta M}{EI}dz \tag{2.136}$$

avendo usato la formula di Navier, e:

$$L_i^2 = \int_0^L \delta p(z) v(z) dz = \int_0^L \delta p(z) \frac{p(z)}{k(z)} dz \quad (2.137)$$

Usando le condizioni di equilibrio si ha:

$$p(z) = -q(z) - M'' \quad \delta p(z) = -\delta M'' \quad (2.138)$$

e quindi il p.f.v. si scrive:

$$\int_0^L \left[\frac{M \delta M}{EI} + \delta M'' \left(\frac{q + M''}{k} \right) \right] dz = 0 \quad (2.139)$$

Integrando per parti si modifica il secondo integrale:

$$\int_0^L \left[\frac{M}{EI} + \left(\frac{q'' + M''''}{k} \right) \right] \delta M dz + \left[\left(\frac{q + M''}{k} \right) \delta M' \right]_0^L - \left[\left(\frac{q' + M'''}{k} \right) \delta M \right]_0^L \quad (2.140)$$

Si ottiene quindi l'equazione differenziale:

$$M'''' + \frac{k}{EI} M + q'' = 0 \quad (2.141)$$

con le condizioni ai limiti da determinarsi come usuale.

2.14. Note bibliografiche

Quasi tutti gli argomenti trattati in questo capitolo sono contenuti in un qualsiasi testo di medio livello sui metodi variazionali. Di conseguenza, ci si accontenterà di suggerire alcune letture integrative, senza alcuna pretesa di esaustività.

Il lettore interessato alla genesi storica dei principi energetici può utilmente consultare, in lingua italiana, Benvenuto [1981], oppure il capitolo VII in Parvopassu [1953]. Un approfondimento ulteriore può ritrovarsi in Benvenuto [1991], in Timoshenko [1953] e nel monumentale Todhunter e Pearson [1886].

Il principio dei lavori virtuali, nella forma enunciata nel testo, è equivalente alla *identità fondamentale* nella terminologia di Gurtin [1972], e non al principio dei lavori virtuali illustrato nei testi classici di Scienza delle Costruzioni (cfr. ad esempio Franciosi [1959]). Quest'ultimo, infatti, è più propriamente definito nel presente volume come principio delle forze virtuali.

Il testo basilare sui funzionali ibridi è Washizu [1982], dove può consultarsi anche una ricchissima bibliografia. Il lettore che volesse approfondire gli aspetti applicativi,

ed in particolare l'utilizzo dei funzionali ibridi nel metodo agli elementi finiti, dovrebbe studiare la serie di memorie di Pian e della sua scuola. (Pian [1964, 1971, 1978, 1982, 1983, 1985], Pian e Tong [1968, 1969, 1986], Tong e Pian [1969], Tong [1970, 1982], Tong et al. [1973], Pian e Chen [1982a, 1982 b], Pian et al. [1983, 1984, 1988], Chen e Cheung [1987]). Si veda anche il libro di Tong e Rossettos [1977], e la monografia di Roberts e Thomas [1991], con l'allegata bibliografia. Una interessante memoria, in un certo senso da considerarsi duale ai lavori della scuola di Pian, è Militello e Felippa [1990].

Infine, un interessante testo sull'argomento, che fornisce un punto di vista più tecnico, è Poceski [1992], mentre Brezzi e Fortin [1991] è una rassegna completa delle complicazioni analitiche associate ai metodi di tipo ibrido.