

4. Le travi reticolari

Si affronta, in questo capitolo, l'analisi statica di travi reticolari piane e spaziali seguendo il metodo dei cedimenti. Si studia prima un procedimento generale di calcolo per la matrice di rigidezza elementare di un elemento asta in riferimento locale, e per la deduzione delle forze nodali equivalenti. Si ruota poi il riferimento locale, in modo da allinearlo al riferimento globale, ed ottenendo quindi la matrice di rigidezza in coordinate globali. Si illustra poi un modo computazionalmente efficiente di costruire la matrice di rigidezza globale della struttura (metodo diretto), e si risolve il sistema di equazioni di equilibrio.

4.1. La matrice di rigidezza elementare in riferimento locale

Si consideri l'asta di Figura 4.1, di luce L , a due nodi, a sezione costante A , e costituita da materiale isotropo e linearmente elastico, con modulo di Young E .

Si espone ora un procedimento che permette la deduzione dell'intera matrice di rigidezza; se invece si vuole conoscere un solo coefficiente di rigidezza, è preferibile adottare i metodi del capitolo 3.

L'asta di Figura 4.2 ha 2 gradi di libertà, ossia i due spostamenti assiali dei nodi 1 e 2. Siano essi U_{a1} ed U_{a2} . Corrispondentemente, le uniche forze nodali che possono sorgere sono le due forze assiali F_{a1} ed F_{a2} (Figura 4.3). La matrice di rigidezza elementare \mathbf{k}_a lega gli spostamenti nodali alle forze nodali, secondo la relazione matriciale:

$$\begin{Bmatrix} F_{a1} \\ F_{a2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{a1} \\ U_{a2} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Il metodo proposto si basa sui seguenti passi:

1. deduzione della equazione differenziale della linea elastica
2. soluzione dell'equazione della linea elastica con le opportune condizioni ai limiti
3. calcolo caratteristiche (in questo caso, sforzo assiale), tramite derivazione
4. calcolo forze nodali

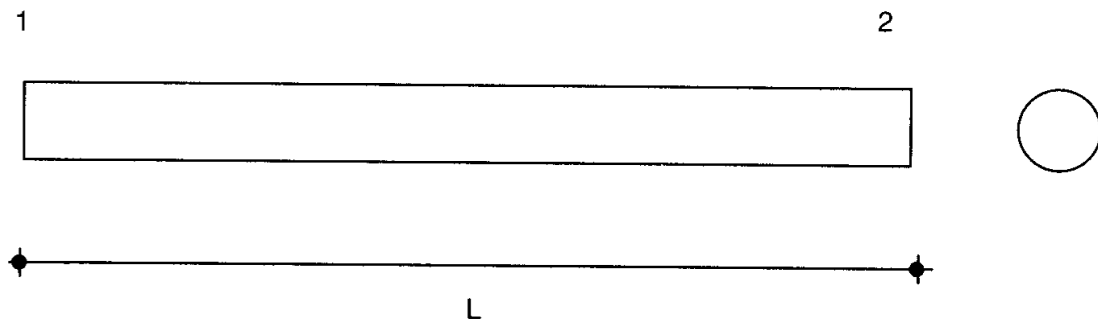


Figura 4.1- Asta a sezione costante

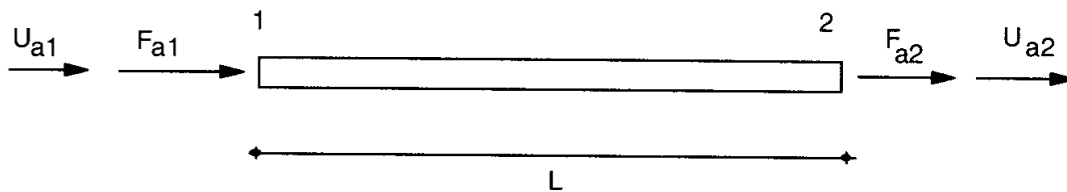


Figura 4.2- Incognite nodali per l'asta

Deduzione della equazione differenziale della linea elastica

L'equazione differenziale della linea elastica si deduce imponendo l'equilibrio di un concio di asta (Figura 4.3). In questo caso, l'unico equilibrio da imporre è alla traslazione orizzontale, e si ottiene:

$$\frac{dN}{dx} = 0 \quad (4.2)$$

dove N è lo sforzo normale, positivo se di trazione. Usando ora la relazione:

$$N = \sigma_x A \quad (4.3)$$

la legge di Hooke:

$$\sigma_x = E e_x \quad (4.4)$$

e la relazione spostamenti – deformazioni:

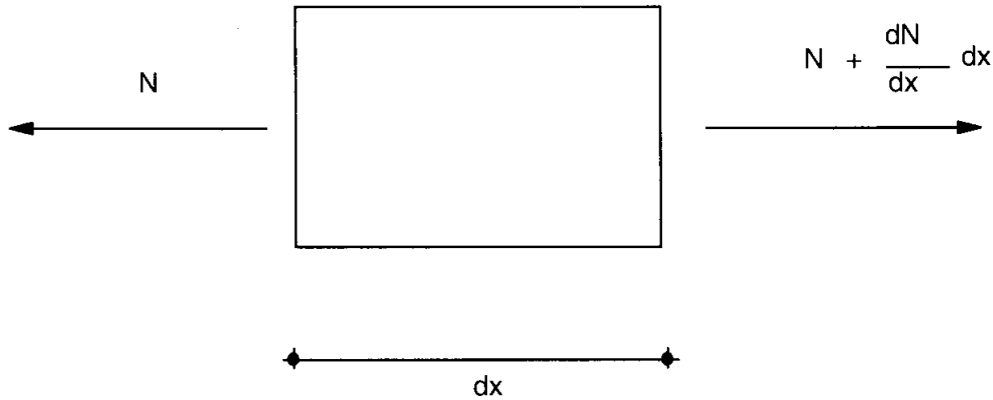


Figura 4.3- Concio elementare per l'elemento asta

$$e_x = \frac{du}{dx} \quad (4.5)$$

si giunge alla ricercata relazione differenziale:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (4.6)$$

il cui integrale generale è:

$$u(x) = C_1 + C_2 x = \boldsymbol{\alpha} A. \quad (4.7)$$

$\boldsymbol{\alpha} = [1, x]$ è un vettore riga di monomi, mentre

$$A = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

è il vettore colonna delle costanti di integrazione, detto *vettore delle coordinate generalizzate*.

Imposizione delle condizioni ai limiti

Si impongono gli spostamenti nodali U_{a1} ed U_{a2} :

$$u(0) = U_{a1} \quad (4.9)$$

$$u(L) = U_{a2} \quad (4.10)$$

che conducono al sistema:

$$\mathbf{CA} = \mathbf{d}_a \quad (4.11)$$

con:

$$\mathbf{d}_a = \begin{Bmatrix} U_{a1} \\ U_{a2} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

dove il vettore \mathbf{d}_a è il vettore delle coordinate nodali. La matrice \mathbf{C} è facilmente invertibile, e quindi si ottiene:

$$C_1 = U_{a1} \quad (4.13)$$

$$C_2 = \frac{U_{a2} - U_{a1}}{L} \quad (4.14)$$

La linea elastica si scrive quindi:

$$u(x) = N_{a1}(x)U_{a1} + N_{a2}(x)U_{a2} \quad (4.15)$$

con:

$$N_{a1}(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (4.16)$$

$$N_{a2}(x) = \frac{x}{L}. \quad (4.17)$$

Le funzioni $N_{ai}(x)$ si chiamano *funzioni di forma*, (*shape functions*) ed hanno la proprietà di assumere valore unitario nel nodo i , ed essere nulle negli altri nodi. (Figura 4.4).

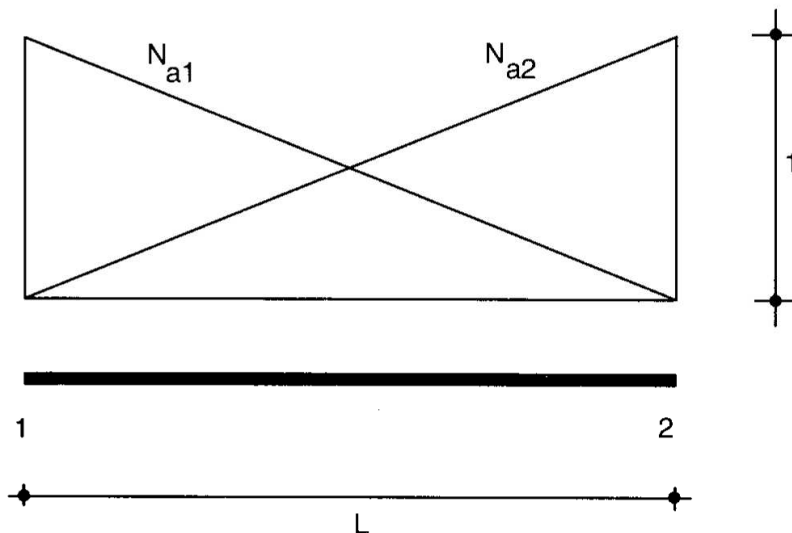


Figura 4.4- Funzioni di forma per l'elemento asta

Calcolo caratteristiche

Poichè lo sforzo normale è pari a:

$$N(x) = EA \frac{du}{dx} \quad (4.18)$$

si ottiene subito:

$$N(x) = \frac{EA}{L} (U_{a2} - U_{a1}) \quad (4.19)$$

Calcolo forze nodali

Lo sforzo normale è positivo se di trazione, mentre le forze nodali sono positive se agenti da sinistra a destra. Se ne deduce che:

$$F_{a1} = -N(0) = \frac{EA}{L} (U_{a1} - U_{a2}) \quad (4.20)$$

$$F_{a2} = N(L) = \frac{EA}{L} (U_{a2} - U_{a1}) \quad (4.21)$$

La matrice di rigidezza è deducibile dal confronto tra queste due ultime formule e la (4.1):

$$\mathbf{k}_a = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

4.2. La matrice di rigidezza elementare in riferimento globale

Se gli assi (x, y) locali non sono paralleli agli assi globali (X, Y) , (Figura 4.5), è necessario 'ruotare' la matrice di rigidezza elementare.

Sia allora γ l'angolo che la coppia locale (x, y) forma rispetto alla coppia globale (X, Y) , e siano λ_x e μ_x i coseni direttori di x rispetto agli assi X ed Y rispettivamente. Dalla Figura 4.5 si può dedurre:

$$\lambda_x = \cos \gamma \quad (4.23)$$

$$\mu_x = \cos(90^\circ - \gamma) = \sin \gamma \quad (4.24)$$

Analogamente, siano λ_y e μ_y i coseni direttori dell'asse y rispetto agli assi X ed Y :

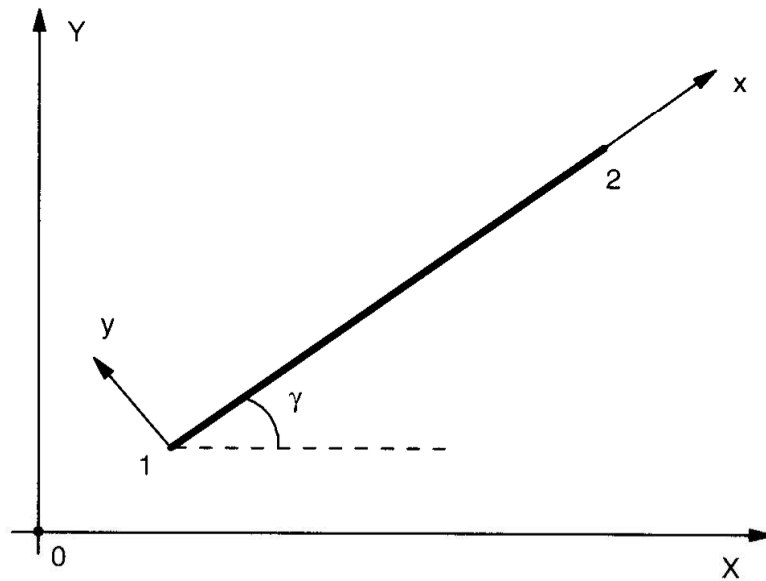


Figura 4.5- L'elemento asta in coordinate globali

$$\lambda_y = \cos(90^\circ + \gamma) = -\sin \gamma \quad (4.25)$$

$$\mu_y = \cos \gamma \quad (4.26)$$

Un qualsiasi vettore \mathbf{A} può essere espresso tramite le sue componenti ortogonali (A_x, A_y) sugli assi (x, y) , o tramite le sue componenti ortogonali (A_X, A_Y) sugli assi (X, Y) .

Se si vuole esprimere (A_x, A_y) in termini di (A_X, A_Y) , occorre scrivere (cfr. Figura 4.6):

$$A_x = A_X \lambda_x + A_Y \mu_x \quad (4.27)$$

$$A_y = A_X \lambda_y + A_Y \mu_y \quad (4.28)$$

o, matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} A_x \\ A_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \mu_x \\ \lambda_y & \mu_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_X \\ A_Y \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

o anche:

$$\mathbf{A}_x = \mathbf{R} \mathbf{A}_X \quad (4.30)$$

dove \mathbf{R} è la *matrice di rotazione*.

Analogamente, può esprimersi (A_X, A_Y) in termini di (A_x, A_y) :

$$\mathbf{A}_X = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A}_x = \mathbf{R}^T \mathbf{A}_x \quad (4.31)$$

Si noti che $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, e quindi \mathbf{R} è una matrice ortogonale (cfr.par.1.4).
Tutto ciò premesso, si vuol vedere come la relazione:

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{k}_a \mathbf{d}_a \quad (4.32)$$

scritta in riferimento agli assi locali, si possa esprimere in riferimento agli assi globali.

Prima di tutto è necessario osservare che il vettore \mathbf{f}_a deve essere riscritto come:

$$\mathbf{f}_a^T = \{F_{a1}, F_{n1}, F_{a2}, F_{n2}\} \quad (4.33)$$

ed analogamente:

$$\mathbf{d}_a^T = \{U_{a1}, U_{n1}, U_{a2}, U_{n2}\} \quad (4.34)$$

Quindi \mathbf{k}_a deve essere espansa a dimensioni (4×4) :

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Il vettore \mathbf{f}_a è composto dalle componenti assiali e dalle componenti ortogonali all'asse (nulle) dei due vettori \mathbf{f}_{a1} ed \mathbf{f}_{a2} .

Se si vogliono ruotare ambedue questi vettori occorre scrivere (Figura 4.6):

$$\begin{Bmatrix} F_{a1} \\ 0 \\ F_{a2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \mu_x & 0 & 0 \\ \lambda_y & \mu_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \mu_x \\ 0 & 0 & \lambda_y & \mu_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

ossia:

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{R}_T \mathbf{f}_X \quad (4.37)$$

con:

$$\mathbf{R}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Analogamente si può scrivere:

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{R}_T \mathbf{d}_X \quad (4.39)$$

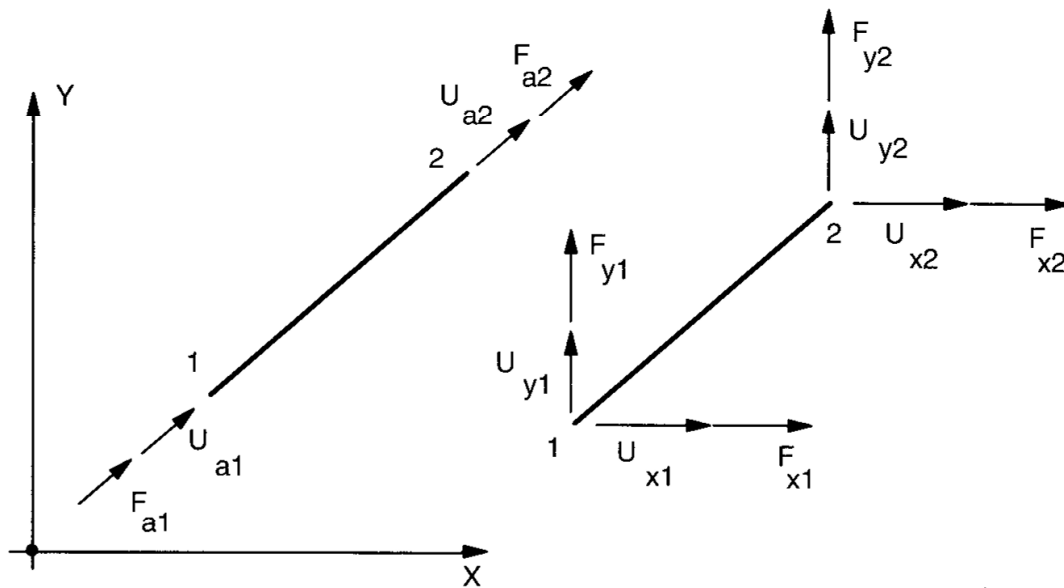


Figura 4.6- Riferimento globale e riferimento locale per l'asta

da cui:

$$\mathbf{f}_X = (\mathbf{R}_T^T \mathbf{k}_e \mathbf{R}_T) \mathbf{d}_X \quad (4.40)$$

o anche:

$$\mathbf{f}_X = \mathbf{k} \mathbf{d}_X \quad (4.41)$$

dove $\mathbf{k} = (\mathbf{R}_T^T \mathbf{k}_e \mathbf{R}_T)$ è la *matrice di rigidezza elementare* in coordinate globali. Svolgendo il triplo prodotto matriciale si ottiene, esplicitamente:

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma & \cos \gamma \sin \gamma & -\cos^2 \gamma & -\cos \gamma \sin \gamma \\ \cos \gamma \sin \gamma & \sin^2 \gamma & -\cos \gamma \sin \gamma & -\sin^2 \gamma \\ -\cos^2 \gamma & -\cos \gamma \sin \gamma & \cos^2 \gamma & \cos \gamma \sin \gamma \\ -\cos \gamma \sin \gamma & -\sin^2 \gamma & \cos \gamma \sin \gamma & \sin^2 \gamma \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

4.3. Il calcolo delle forze nodali equivalenti

Sia $f(x)$ una stesa di carico distribuita lungo l'asta, e si vogliono calcolare le due forze nodali equivalenti, secondo la definizione del paragrafo 1 del capitolo 3.

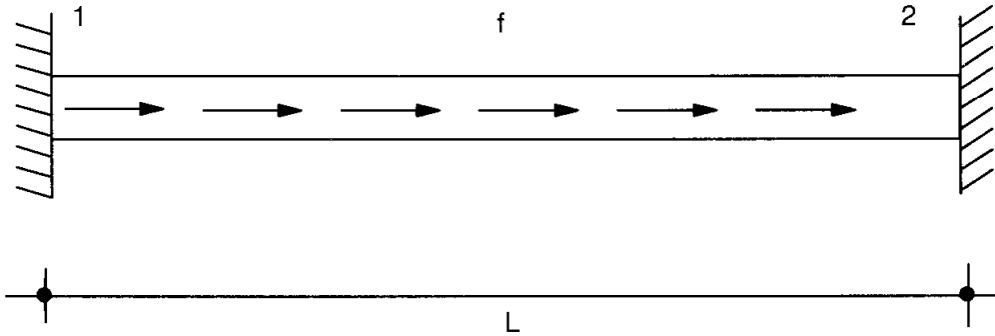


Figura 4.7- Asta soggetta a carico distribuito: schema a nodi fissi

Occorre allora risolvere lo schema *a nodi fissi* di Figura 4.7, ed all'uopo può utilizzarsi ancora l'equazione della linea elastica. In presenza di forze assiali si ha:

$$EA \frac{du^2}{dx^2} + f(x) = 0 \quad (4.43)$$

la cui soluzione è:

$$u(x) = C_1 + C_2 x + I \quad (4.44)$$

ed I dipende dalla particolare funzione $f(x)$.

Le condizioni ai limiti sono comunque quelle per estremi fissi:

$$u(0) = 0 \quad (4.45)$$

$$u(L) = 0. \quad (4.46)$$

Esaminiamo ora alcuni casi usuali di carichi:

4.3.1. Carico uniformemente distribuito

In questo caso l'integrale particolare è fornito da:

$$I = -\frac{f}{2EA} x^2 \quad (4.47)$$

e quindi:

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (4.48)$$

$$u(L) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{fL}{2EA} \quad (4.49)$$

da cui:

$$u(x) = \frac{f}{2EA}(L-x)x. \quad (4.50)$$

Lo sforzo normale è calcolabile a partire dalla (4.18):

$$N(x) = \frac{fL}{2} \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) \quad (4.51)$$

e le forze nodali equivalenti sono:

$$P_1 = -F_{a1} = N(0) = \frac{fL}{2} \quad (4.52)$$

$$P_2 = -F_{a2} = -N(L) = \frac{fL}{2} \quad (4.53)$$

Come intuibile, quindi, il carico costante si è equidistribuito ai due estremi.

4.3.2. Carico variabile linearmente

L'integrale particolare stavolta è una funzione cubica:

$$I = -f_0 \frac{x^3}{6EAL} \quad (4.54)$$

e le condizioni ai limiti impongono:

$$u(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (4.55)$$

$$u(L) = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{f_0 L}{6EA} \quad (4.56)$$

La funzione spostamento è calcolabile come:

$$u(x) = \frac{f_0}{6EAL} (L^2 - x^2) x \quad (4.57)$$

e lo sforzo normale è:

$$N(x) = \frac{f_0 L}{6} \left(1 - 3\frac{x^2}{L^2}\right) \quad (4.58)$$

Infine, le forze nodali equivalenti sono:

$$P_1 = \frac{f_0 L}{6} \quad (4.59)$$

$$P_2 = \frac{f_0 L}{3} \quad (4.60)$$

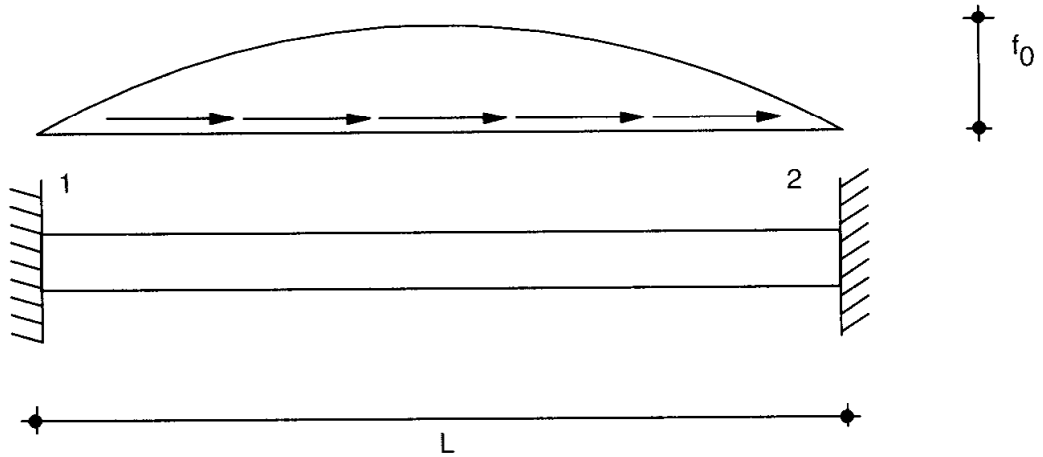


Figura 4.8- Asta soggetta a carico distribuito con legge parabolica

4.3.3. Carico variabile con legge parabolica

In questo caso la funzione $f(x)$ è fornita da (Figura 4.8)

$$f(x) = \frac{4f_0}{L^2EA}x(L-x) \quad (4.61)$$

e l'integrale particolare è calcolabile come:

$$I = -\frac{2}{3} \frac{f_0}{EA} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) \frac{x^2}{L^2} \quad (4.62)$$

Le due costanti di integrazione sono:

$$C_1 = 0 \quad (4.63)$$

$$C_2 = \frac{f_0L}{3EA} \quad (4.64)$$

da cui:

$$u(x) = \frac{f_0L}{3EA} \left(x - \frac{2x^3}{L^2} + \frac{x^4}{L^3} \right) \quad (4.65)$$

Lo sforzo normale è quindi distribuito secondo la legge:

$$N(x) = \frac{f_0L}{3} \left(1 - 6\frac{x^2}{L^2} + 4\frac{x^3}{L^3} \right) \quad (4.66)$$

Le forze nodali, infine, sono fornite da:

$$P_1 = \frac{f_0 L}{3} \quad (4.67)$$

$$P_2 = \frac{f_0 L}{3} \quad (4.68)$$

Qualsiasi distribuzione di carico può essere trattata in questo modo, purchè si possa conoscere un integrale particolare dell'equazione differenziale della linea elastica.

4.4. Le forze nodali equivalenti ad una variazione termica

In presenza di variazioni termiche, o comunque di distorsioni distribuite di tipo λ (assiali), l'equazione differenziale della linea elastica va generalizzata come segue.

L'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale conduce a scrivere, come sopra:

$$\frac{dN}{dx} = 0 \quad (4.69)$$

ma ora lo sforzo normale non è più fornito dalla (4.18), bensì dalla:

$$N = EA \frac{du}{dx} + EA\lambda \quad (4.70)$$

dove nel caso delle variazioni termiche sarà $\lambda = -\alpha\Delta T$, con α coefficiente di espansione termica, e ΔT variazione termica.

Ne segue che l'equazione della linea elastica è:

$$EA \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d\lambda}{dx} \right) = 0 \quad (4.71)$$

Se λ è costante, si ha, come può facilmente verificarsi, una linea elastica identicamente nulla. Lo sforzo normale è allora fornito da:

$$N(x) = EA\lambda \quad (4.72)$$

e quindi le forze nodali equivalenti sono:

$$P_1 = EA\lambda \quad (4.73)$$

$$P_2 = -EA\lambda \quad (4.74)$$

Una variazione termica positiva $\Delta T > 0$, di allungamento, è quindi equivalente a due forze nodali che tendono a stirare l'elemento:

$$P_1 = -EA\alpha\Delta T \quad (4.75)$$

$$P_2 = EA\alpha\Delta T \quad (4.76)$$

4.5. Il caso della travatura spaziale

L'unica variante che occorre introdurre, per il caso spaziale, è nel passaggio dalla matrice di rigidezza elementare in coordinate locali alla matrice di rigidezza elementare in coordinate globali.

In tre dimensioni, infatti, i coseni direttori della terna locale (x, y, z) rispetto alla terna globale (X, Y, Z) trovano posto nella matrice di rotazione \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \mu_x & \nu_x \\ \lambda_y & \mu_y & \nu_y \\ \lambda_z & \mu_z & \nu_z \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Di conseguenza, la matrice di rigidezza in coordinate locali si scriverà:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & 0 & 0 & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

ed in coordinate globali sarà:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^T \end{bmatrix} \mathbf{k}_e \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Si noti che

$$\lambda_x = \frac{l_x}{L} \quad \mu_x = \frac{l_y}{L} \quad \nu_x = \frac{l_z}{L} \quad (4.80)$$

dove l_x , l_y ed l_z sono le proiezioni dell'asta sui tre assi X, Y, Z . Gli altri elementi di \mathbf{R} non giocano alcun ruolo nel triplo prodotto matriciale (4.79). Esplicitamente sarà:

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x \mu_x & \lambda_x \nu_x & -\lambda_x^2 & -\lambda_x \mu_x & -\lambda_x \nu_x \\ \lambda_x \mu_x & \mu_x^2 & \mu_x \nu_x & -\lambda_x \mu_x & -\mu_x^2 & -\mu_x \nu_x \\ \lambda_x \nu_x & \mu_x \nu_x & \nu_x^2 & -\lambda_x \nu_x & -\mu_x \nu_x & -\nu_x^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x \mu_x & -\lambda_x \nu_x & \lambda_x^2 & \lambda_x \mu_x & \lambda_x \nu_x \\ -\lambda_x \mu_x & -\mu_x^2 & -\mu_x \nu_x & \lambda_x \mu_x & \mu_x^2 & \mu_x \nu_x \\ -\lambda_x \nu_x & -\mu_x \nu_x & -\nu_x^2 & \lambda_x \nu_x & \mu_x \nu_x & \nu_x^2 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

4.6. Il calcolo delle equazioni di equilibrio

Si consideri una travatura reticolare ad N nodi ed a aste. Se non vi fossero vincoli esterni, ogni nodo subirebbe, in conseguenza dell'applicazione delle forze esterne, spostamenti secondo i tre assi coordinati globali. Il sistema avrebbe quindi $3N$ gradi di libertà, se spaziale, o $2N$ gradi di libertà, se piano.

L'introduzione dei vincoli esterni sopprime m possibilità di movimento, e quindi il sistema vincolato ha $n = 3N - m$ (oppure $2N - m$) gradi di libertà.

4.6.1. Le equazioni di equilibrio

Nel metodo dei cedimenti applicato a strutture a scheletro si scrivono condizioni di equilibrio, imponendo — in ciascun nodo — che la somma delle forze su di esso agenti sia in equilibrio.

Poichè in ogni nodo è possibile imporre l'equilibrio alla traslazione lungo i tre assi coordinati (oppure lungo i due assi coordinati, se si considera la travatura piana), si potranno scrivere $3N$ (risp. $2N$) equazioni di equilibrio. Di esse, m saranno superflue in quanto le reazioni garantiscono comunque l'equilibrio.

E' dunque possibile scrivere tante equazioni quante sono le coordinate lagrangiane. Le equazioni di equilibrio esprimono l'annullarsi della somma delle forze agenti su di un nodo; occorre, di conseguenza, conoscere le forze che si destano agli estremi di ogni asta, per effetto di uno spostamento — congruente — degli estremi stessi. Come si è visto, queste forze sono calcolate tramite le matrici elementari di rigidezza.

4.6.2. Il problema della congruenza

La congruenza degli spostamenti dei nodi deve essere imposta *a priori*. Tra tutti gli spostamenti congruenti, si ricercano quelli che soddisfano anche le condizioni di equilibrio, e che quindi sono gli spostamenti effettivi. Per imporre a priori la congruenza occorre imporre che le aste concorrenti in uno stesso nodo abbiano, in quel nodo, lo stesso spostamento. Ciò può farsi, nel modo più immediato, tramite l'introduzione della *tabella delle libertà dei nodi*. In essa, per ogni nodo, sono indicati i numeri delle coordinate lagrangiane che a quel nodo competono. Come esempio, si

consideri la travatura reticolare di Figura 4.9. Essa è costituita da 10 nodi, e quindi, senza i vincoli, sarebbe un sistema a 20 gradi di libertà. La cerniera 1 elimina 2 gradi di libertà, e ciascun carrello ne elimina un altro, si è in presenza di un sistema a 16 gradi di libertà.

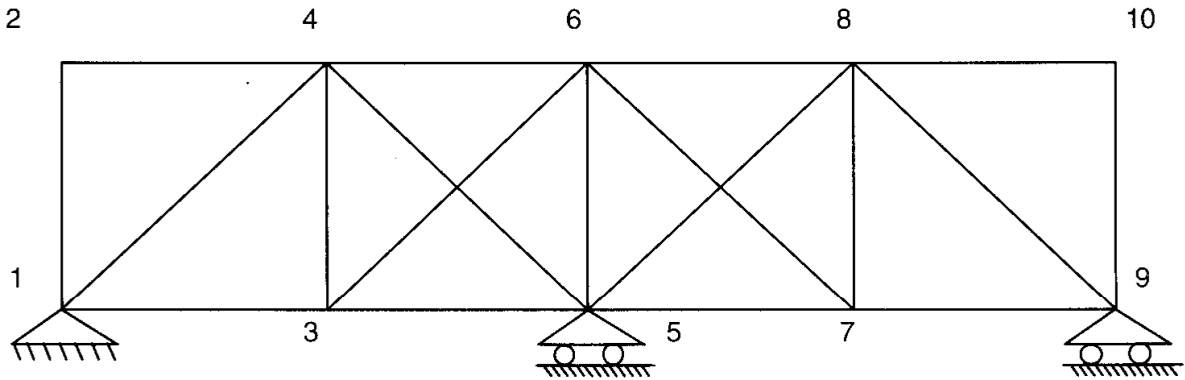


Figura 4.9- Travatura reticolare piana

La tabella dei gradi di libertà è riportata in Tabella 4.1. Per ogni nodo, sono indicate le coordinate lagrangiane che interessano quel nodo. Ad esempio, nel nodo 7 si andrà a scrivere l'equazione 10 di equilibrio alla traslazione orizzontale, ed 11 di equilibrio alla traslazione verticale.

Travatura reticolare		
Nodo	Traslazione x	Traslazione y
1	0	0
2	1	2
3	3	4
4	5	6
5	7	0
6	8	9
7	10	11
8	12	13
9	14	0
10	15	16

Tabella 4.1- Tabella delle libertà dei nodi

4.6.3. L'assemblaggio della matrice globale di rigidezza

Il sistema finale di equazioni di equilibrio può scriversi:

$$\mathbf{Kc} = \mathbf{f} \quad (4.82)$$

dove \mathbf{K} è la *matrice globale di rigidezza*, \mathbf{c} è il vettore dei gradi di libertà, ed \mathbf{f} è il *vettore globale delle forze nodali*.

L'assemblaggio della matrice \mathbf{K} può condursi in due modi sostanzialmente duali:

- scrivere le equazioni di equilibrio nodo per nodo
- esaminare le aste in successione, e per ognuna di esse modificare la matrice \mathbf{K} in modo opportuno

Si adotta la seconda procedura, computazionalmente più efficiente.

Si consideri allora la generica asta, di estremi i e j . Dalla tabella delle libertà dei nodi si leggono, in riga i ed in riga j , quali sono le equazioni di equilibrio che andranno modificate. Siano, per travatura reticolare piana, r, s, t, v i numeri delle equazioni da modificare. In generale, vi saranno 4 equazioni da modificare, per travatura piana, o 6 per travatura spaziale, ma se gli estremi sono vincolati ve ne saranno di meno.

La matrice elementare di rigidezza dell'asta $i - j$ fornirà le forze $F_{xi}, F_{yi}, F_{xj}, F_{yj}$ che nascono agli estremi dell'asta:

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_r \\ c_s \\ c_t \\ c_v \end{Bmatrix} \quad (4.83)$$

e quindi le modifiche riguarderanno le quattro righe r, s, t, v e le quattro colonne r, s, t, v :

$$K_{rr} = K_{rr} + k_{11}, \quad K_{rs} = K_{rs} + k_{12}, \quad K_{rt} = K_{rt} + k_{13}, \quad K_{rv} = K_{rv} + k_{14}$$

$$K_{sr} = K_{sr} + k_{21}, \quad K_{ss} = K_{ss} + k_{22}, \quad K_{st} = K_{st} + k_{23}, \quad K_{sv} = K_{sv} + k_{24}$$

$$K_{tr} = K_{tr} + k_{31}, \quad K_{ts} = K_{ts} + k_{32}, \quad K_{tt} = K_{tt} + k_{33}, \quad K_{tv} = K_{tv} + k_{34}$$

$$K_{vr} = K_{vr} + k_{41}, \quad K_{vs} = K_{vs} + k_{42}, \quad K_{vt} = K_{vt} + k_{43}, \quad K_{vv} = K_{vv} + k_{44}$$

4.6.4. Il vettore globale delle forze nodali

Il vettore \mathbf{f} è costituito da due aliquote. La prima è quella dovuta alle forze applicate direttamente sui nodi, la seconda è costituita dai carichi nodali equivalenti. Il suo assemblaggio è totalmente analogo a quanto fatto per assemblare la matrice globale di rigidezza.

4.7. La soluzione del sistema di equazioni

Il sistema di equazioni di equilibrio (4.82) va risolto numericamente nel modo più efficace possibile, essendo la parte più impegnativa dell'intera analisi. I metodi di soluzione di un sistema di equazioni lineari si dividono in due grandi categorie: *metodi di fattorizzazione diretti*, e *metodi di iterazione indiretti*.

I metodi diretti si basano tutti sul metodo di eliminazione alla Gauss, che riduce il sistema di equazioni ad un sistema triangolare equivalente. Per informazioni sulle proprietà dei metodi alla Gauss può consultarsi il terzo capitolo di Golub e Van Loan, [1989], oppure il quarto capitolo di Stoer e Bulirsch [1980]. Un algoritmo generale di calcolo è dettagliatamente descritto in A.Orden, in A.Ralston e H.Wilf [1960], mentre un semplice programma di calcolo in FORTRAN può essere studiato in R.A.Adey e C.Brebbia [1983]. Un programma più sofisticato, che permette l'uso delle memorie di massa è riportato, in FORTRAN, in P.S.Theocaris et al. [1981], ed un metodo ancora più raffinato, che ottimizza l'uso delle memorie di massa è riportato in N.Ida et al.[1984]. Se il sistema di equazioni è di dimensioni particolarmente elevate, allora può farsi ricorso al programma presentato in C.P.Vendhan et al. [1974].

Una variante al metodo di Gauss è proposta in F.W.Williams et al.[1988], dove un metodo ibrido di Gauss–Doolittle sembra essere più veloce del classico metodo di Gauss. Infine, un sottoprogramma in PASCAL è riportato in C.P.Spyropoulos et al. [1985]. Il metodo, basato sul concetto di trasformazioni piane di Givens, fornisce risultati molto precisi anche se la matrice è mal condizionata. Inoltre la subroutine proposta è stata paragonata alla subroutine FO4AEA del NAG (variante di Crout del metodo di Gauss), ed è risultata più veloce.

Un discorso a parte richiede il caso in cui la struttura è mal progettata, oppure per un qualsiasi altro motivo si trova sulle soglie della labilità. In tal caso la matrice \mathbf{K} è quasi singolare, ed il sistema è numericamente instabile. Si può ricorrere a subroutine *ad hoc* che consentono di risolvere il sistema di equazioni; tuttavia non si deve trascurare il fatto che una matrice mal condizionata è sempre indizio di cattiva progettazione. Due metodi possono essere utilizzati, se \mathbf{K} è mal condizionata. Secondo il primo di essi, si risolve il sistema con il metodo di eliminazione gaussiana, si calcolano i residui, e si risolve un'altra volta il sistema con i residui come termini noti. Una descrizione completa del metodo può trovarsi in J.H.Wilkinson in A.Ralston, H.Wilf [1967]. Nel secondo metodo, invece, si cerca di rendere ben condizionata la matrice \mathbf{K} trasformandola preventivamente in modo opportuno. Si consulti a tal riguardo Shi Gen-Hua [1982].

Tra i metodi iterativi, di tipo indiretto, si possono citare i classici metodi di Gauss–Siedel e del gradiente coniugato, ed i più efficienti metodi SOR di rilassamento. Tutti questi metodi sono particolarmente ben adatti a sistemi di grandi dimensioni. Per informazioni generali su tutti i metodi di iterazione si può consultare il capitolo 10 del libro già citato di Golub e Van Loan, dove l'enfasi è sui metodi del gradiente

coniugato, o il capitolo 8 del già citato libro di Stoer e Bulirsch. Un sottoprogramma di calcolo che usa il metodo di Gauss–Siedel per sistemi di grande dimensione può consultarsi in G.Cantin [1971], mentre un'interessante variante al metodo del gradiente coniugato può essere studiata nel lavoro di A.Jennings et al. [1978]. Infine, una descrizione dettagliata del metodo di Gauss–Siedel e del metodo del gradiente coniugato può ritrovarsi negli articoli di Van Norton e F.S.Beckman nel già citato libro *Mathematical Methods for Digital Computers* [1960].

Tutti i metodi finora elencati non si avvantaggiano di nessuna proprietà particolare della matrice dei coefficienti del sistema. Viceversa, il sistema di equazioni di equilibrio (4.82) ha le seguenti caratteristiche:

1. ha matrice dei coefficienti \mathbf{K} simmetrica
2. ha matrice dei coefficienti \mathbf{K} definita positiva (se la struttura non è labile)
3. ha matrice dei coefficienti \mathbf{K} usualmente a banda e sparsa
4. ha dimensioni 'medie', dove per medie si intende comprese, approssimativamente, tra 20 e 200

Esistono svariati metodi che permettono la risoluzione del sistema (4.82), sfruttando adeguatamente le quattro caratteristiche su descritte. Se ad esempio la matrice \mathbf{K} è simmetrica e definita positiva, ma non è a banda, allora può usarsi la subroutine riportata in K.H.Ha [1979], mentre un sottoprogramma BASIC, riportato da D.W.Harris [1981] è adatto a sistemi di medio–piccole dimensioni con matrice simmetrica ed a banda. Viceversa, un metodo ben adatto a matrici simmetriche, a banda, e di grandi dimensioni, è presentato in Y.C.Pao [1981]. Una subroutine in FORTRAN molto efficiente, basata su un metodo di eliminazione alla Gauss che fa un uso 'intelligente' delle memorie di massa, è riportato da M.Dessi et al.[1980]. Infine, uno stato dell'arte dei metodi di soluzione alla Gauss che *non* fanno uso di memorie secondarie è riportato in D.J.Rose et al.[1980].

Sono poi da segnalare alcuni risultati particolari, relativi al metodo di eliminazione gaussiana:

1. una subroutine in Turbo PASCAL, di P.N. Roth [1990], in cui si utilizza a fondo la capacità di gestire i puntatori, propria di questo linguaggio.
2. un sottoprogramma FORTRAN di C.Farhat et al. [1988], scritto appositamente per computer paralleli, a più di un processore, ed utilizzabile sia per matrici sparse che dense
3. il lavoro lungo sugli algoritmi dell'algebra lineare implementati su computer paralleli, di K.A.Gallivan et al. (1990), in cui vengono discusse in dettaglio varie versioni di algoritmi di fattorizzazione alla Gauss.

Non si fa per ora cenno ai metodi di calcolo cosiddetti 'frontali', più adatti ai problemi bi- e tri-dimensionali, e che quindi saranno discussi nell'ambito dell'analisi delle lastre e delle piastre.

Come si vede, esistono innumerevoli varianti e sottoprogrammi del metodo di eliminazione alla Gauss, e numerosi altri metodi altrettanto validi. La scelta di uno di essi dipende da una quantità di fattori, e non sempre sarà univoca. Nell'ambito

delle strutture a scheletro, la relativa esiguità di incognite permette senza dubbio di rivolgersi ad algoritmi che non facciano uso di memorie di massa, guadagnando in velocità. Inoltre, è opportuno sfruttare la simmetria della matrice, mentre sembra troppo complicato utilizzare appieno la forma a banda della matrice.

4.8. Il calcolo delle caratteristiche

Risolto il sistema di equazioni di equilibrio, e calcolato quindi il vettore \mathbf{c} dei gradi di libertà, è possibile risalire agli sforzi assiali nelle aste, tramite le relazioni elementari (4.1). Gli spostamenti lungo la direzione x dell'asta, U_{a1} ed U_{a2} possono calcolarsi, in funzione degli spostamenti lungo X ed Y , come:

$$U_{a1} = u_1 \lambda_x + v_1 \mu_x \quad (4.84)$$

$$U_{a2} = u_2 \lambda_x + v_2 \mu_x \quad (4.85)$$

I valori di u_i e v_i sono noti, poichè la tabella delle libertà dei nodi fornisce la corrispondenza tra numerazione locale e numerazione globale.