

## 7. I metodi variazionali diretti

I metodi variazionali diretti, ed in particolare i metodi di Rayleigh–Ritz e di Bubnov–Galerkin, permettono di ottenere soluzioni approssimate dei problemi esprimibili in forma variazionale. Già presente, sia pure in embrione, nel libro di J. Rayleigh [1894], il primo metodo diretto fu successivamente sviluppato nella sua interezza da W. Ritz [1908, 1909], mentre un metodo diverso, e sotto alcuni punti di vista più potente, fu utilizzato da B. Galerkin [1915].

### 7.1. Il metodo di Rayleigh–Ritz nell’analisi statica

Si consideri un problema variazionale di minimo, del tipo esaminato nel capitolo 2:

$$\mathcal{S}(f(x)) = \min \quad (7.1)$$

dove  $\mathcal{S}(f)$  è un funzionale in forma integrale della funzione  $f$  e delle sue prime  $n$  derivate, ed  $f$  deve essere scelta in un opportuno dominio di definizione (funzione ammissibile). Ad esempio, nel principio di minimo dell’energia potenziale totale, il funzionale  $\mathcal{S}$  è l’energia potenziale totale  $F$ , le funzioni  $f$  devono essere scelte nell’ambito delle funzioni di spostamento  $u$  che soddisfino le condizioni di congruenza interna ed esterna e la legge di Hooke, e nel funzionale compaiono le funzioni  $u$  e le loro derivate prime ( $n = 1$ ).

Secondo il metodo di Rayleigh–Ritz, la funzione  $f(x)$  è espressa come una combinazione lineare di  $m$  funzioni ammissibili scelte *ad hoc*:

$$f(x) = c_1\varphi(x) + \dots + c_i\varphi_i + \dots + c_m\varphi_m \quad (7.2)$$

Inserendo la (7.2) nell’espressione del funzionale in oggetto, si tramuta il funzionale in una funzione delle  $m$  costanti incognite  $c_i$ , che quindi possono essere determinate imponendo le condizioni di minimo. Dall’analisi matematica è noto che tali condizioni sono:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial c_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7.3)$$

La scelta delle funzioni  $\varphi_i$  deve essere condotta rispettando il:  
*criterio di completezza*: si consideri la successione di funzioni coordinate  $(\varphi_i)_i$  definite nell'intervallo di integrazione del funzionale in oggetto. Le funzioni coordinate formano una serie completa se ogni loro combinazione lineare è una funzione ammissibile, e se, per ogni funzione ammissibile  $f(x)$ , è possibile definire una opportuna combinazione lineare di un numero finito di funzioni coordinate, tale che  $\mathcal{S}(f)$  differisca arbitrariamente poco da  $\mathcal{S}(f_n)$ , dove:

$$f_n = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x). \quad (7.4)$$

Questa definizione, pur essendo matematicamente rigorosa, e pur permettendo di dimostrare la convergenza al vero del procedimento all'aumentare di  $m$ , non è operativamente agevole. Appare preferibile intendere per 'completa' una serie di funzioni tale che nessun singolo termine possa essere espresso come combinazione lineare degli altri termini, e nessun termine dello sviluppo sia omesso. In pratica ci si limiterà nel seguito alla serie polinomiale ed alla serie trigonometrica, costituite, tra l'altro, da termini infinitamente derivabili.

## 7.2. Esempi

### 7.2.1. Asta soggetta a carico assiale uniformemente distribuito

Si consideri l'asta a sezione uniforme di Figura 7.1, di area  $A$ , modulo di Young  $E$ , lunghezza  $L$ , e soggetta ad un carico assiale uniformemente distribuito  $p$ .

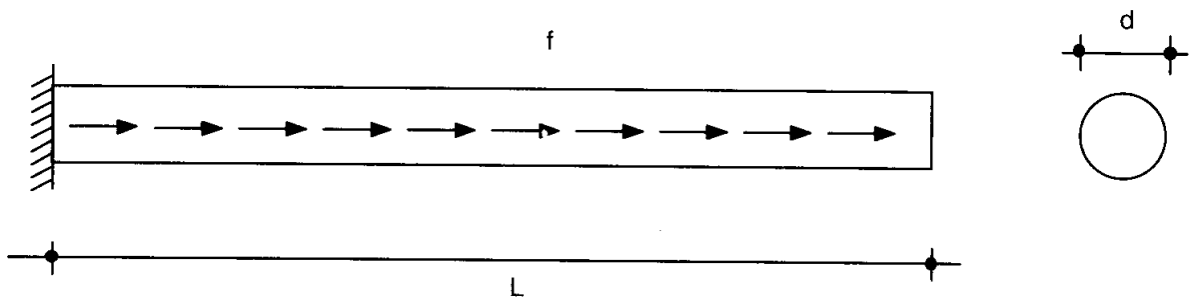


Figura 7.1- Asta a sezione costante soggetta a carico distribuito

In questo caso la soluzione esatta è facilmente deducibile:

$$u(x) = \frac{p}{EA} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) \quad (7.5)$$

$$\sigma_x(x) = \frac{p}{A}(L - x) \quad (7.6)$$

Volendo invece applicare il principio di minimo dell'energia potenziale, si scelga, in prima approssimazione, una funzione spostamento lineare:

$$u(x) = C_1 x \quad (7.7)$$

dove  $C_1$  è detto *spostamento generalizzato*, o *coordinata lagrangiana*. Poichè la deformata è definita univocamente dal valore di  $C_1$ , la struttura è divenuta un sistema ad un grado di libertà.

Si noti che la condizione ai limiti geometrica  $u(0) = 0$  è rispettata, mentre non è soddisfatta la condizione naturale  $\sigma_x(L) = 0$ .

L'energia elastica  $L$  è pari a:

$$L = \frac{1}{2} \int_S \sigma_x \epsilon_x dV = \frac{EA}{2} \int_0^L u'^2 dx = \frac{EA}{2} C_1^2 L \quad (7.8)$$

L'energia potenziale del carico esterno è:

$$P = - \int_0^L p u dx = -p \int_0^L C_1 x dx = -p C_1 \frac{L^2}{2} \quad (7.9)$$

L'energia potenziale totale è definita come:

$$F(C_1) = \frac{1}{2} E A C_1^2 L - p C_1 \frac{L^2}{2} \quad (7.10)$$

e la condizione di stazionarietà conduce a scrivere:

$$\frac{dF}{dC_1} = E A C_1 L - \frac{p}{2} L^2 = 0 \quad (7.11)$$

Si ottiene quindi il valore della coordinata lagrangiana che rende stazionaria l'energia potenziale totale nell'ambito delle funzioni spostamento lineari:

$$C_1 = \frac{pL}{2EA} \quad (7.12)$$

Se ne deduce che:

$$u(x) = \frac{pL}{2EA} x \quad (7.13)$$

e quindi:

$$\sigma_x = E \frac{du}{dx} = \frac{pL}{2A} \quad (7.14)$$

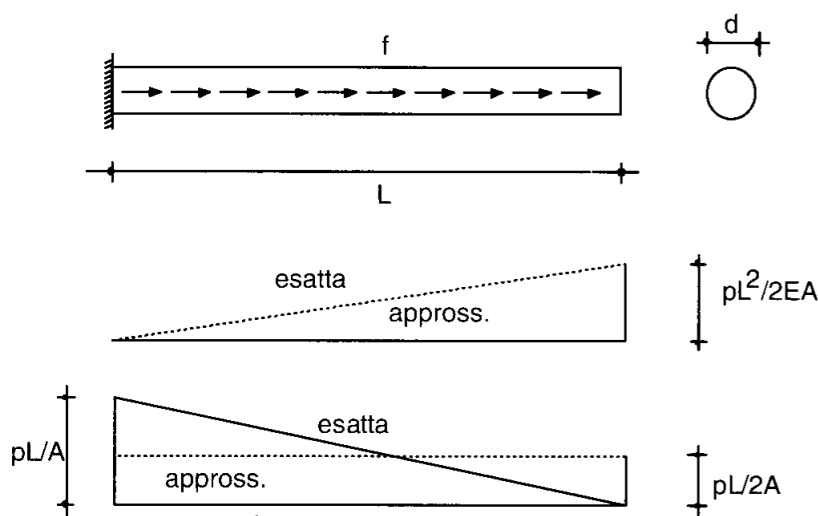


Figura 7.2- Soluzioni esatte ed approssimate a confronto

In Figura 7.2 sono riportate, a confronto, le soluzioni esatte e le soluzioni approssimate. Come si vede, l'approssimazione nelle tensioni è pessima, mentre può essere accettabile per gli spostamenti.

Volendo approssimare meglio la soluzione, si introduce il termine quadratico nell'approssimazione di  $u(x)$ :

$$u(x) = C_1x + C_2x^2 \quad (7.15)$$

L'energia elastica  $L$  diviene:

$$L = \frac{EA}{2} \int_0^L u'^2 dx = \frac{EA}{2} \left[ C_1^2 L + 4C_2^2 \frac{L^3}{3} + 4C_1 C_2 \frac{L^2}{2} \right] \quad (7.16)$$

mentre l'energia potenziale del carico esterno è:

$$P = -p \int_0^L (C_1x + C_2x^2) dx = -p \left( C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 \frac{L^3}{3} \right) \quad (7.17)$$

Imponendo la stazionarietà dell'energia potenziale totale si ottengono le due equazioni, di equilibrio, lineari nelle due coordinate lagrangiane  $C_1$  e  $C_2$ :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 1 & \frac{4}{3}L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p}{2} \\ \frac{p}{3} \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Risolvendo questo sistema si giunge a:

$$C_1 = \frac{pL}{EA} \quad C_2 = -\frac{p}{2EA} \quad (7.19)$$

e quindi alla soluzione esatta. Ciò era del resto da prevedersi, perchè la ricerca del punto di stazionarietà è stata condotta nell'ambito delle funzioni polinomiali quadratiche, cui la funzione esatta appartiene.

Si scelga infine, a titolo di esempio, una funzione ammissibile pari a:

$$u(x) = C_2 x^2 \quad (7.20)$$

cui corrisponde un'energia potenziale totale:

$$F(u) = \frac{2}{3} EAL^3 C_2^2 - \frac{1}{3} pL^3 C_2 \quad (7.21)$$

La coordinata lagrangiana può dedursi dalla condizione di stazionarietà:

$$C_2 = \frac{p}{4EA} \quad (7.22)$$

Il campo di spostamenti ed il campo di tensioni sono quindi:

$$u(x) = \frac{px^2}{4EA} \quad \sigma_x = \frac{px}{2A} \quad (7.23)$$

In Figura 7.3 sono riportati ambedue questi campi, paragonati con la soluzione esatta. Come si vede, l'aver trascurato il termine lineare dello sviluppo in serie ha avuto effetti deleteri sulla precisione del risultato.

Lo stesso esempio precedente può essere risolto tramite il principio degli spostamenti virtuali. Scegliendo il campo di spostamenti lineare:

$$u(x) = C_1 x \quad (7.24)$$

il principio degli spostamenti virtuali si scrive:

$$\int_0^L EA \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{d\delta u}{dx} \right) dx = p \int_0^L \delta u dx \quad (7.25)$$

con:

$$\delta u = \delta C_1 x \quad (7.26)$$

Svolgendo gli integrali si ottiene:

$$EAC_1 \delta C_1 L = p \delta C_1 \frac{L^2}{2} \quad (7.27)$$

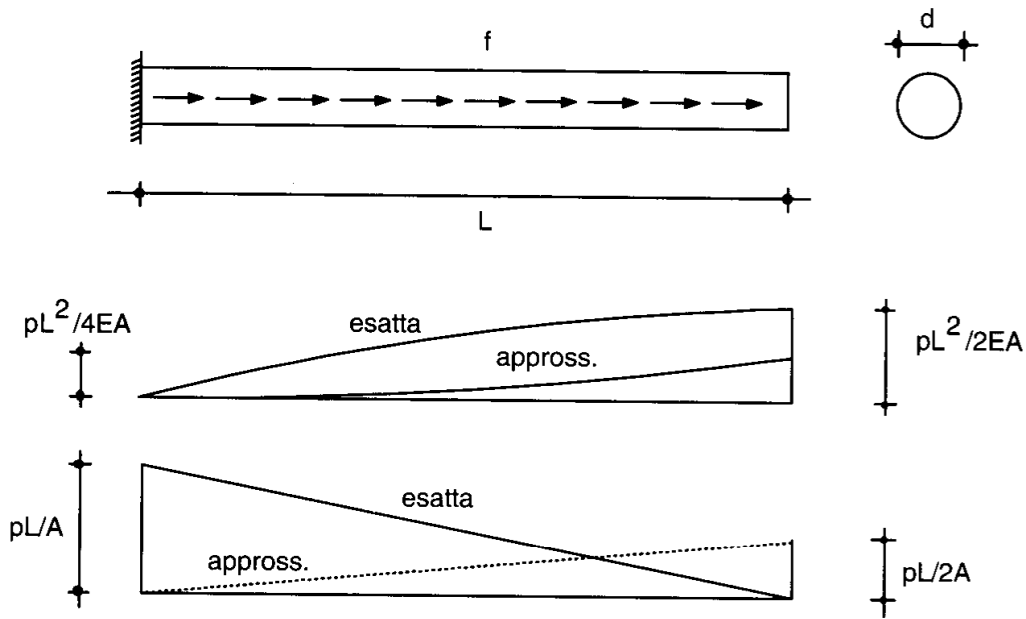


Figura 7.3- Campo di spostamenti e tensioni esatti ed approssimati

e per l'arbitrarietà di  $\delta C_1$  si giunge a definire la coordinata lagrangiana:

$$C_1 = \frac{pL}{2EA} \quad (7.28)$$

Utilizzando il campo di spostamenti:

$$u(x) = C_1 x + C_2 x^2 \quad (7.29)$$

il principio degli spostamenti virtuali diviene:

$$\int_0^L EA (C_1 + 2C_2 x) (\delta C_1 + 2\delta C_2 x) dx = p \int_0^L (\delta C_1 x + \delta C_2 x^2) dx \quad (7.30)$$

e svolgendo gli integrali:

$$\begin{aligned} & EA \left( C_1 L \delta C_1 + 2C_1 \delta C_2 \frac{L^2}{2} + 2C_2 \delta C_1 \frac{L^2}{2} + 4C_2 \delta C_2 \frac{L^3}{3} \right) \\ & = p \left( \delta C_1 \frac{L^2}{2} + \delta C_2 \frac{L^3}{3} \right) \end{aligned} \quad (7.31)$$

da cui, per l'arbitrarietà dei  $\delta C_i$ , si riottiene il sistema (7.18).

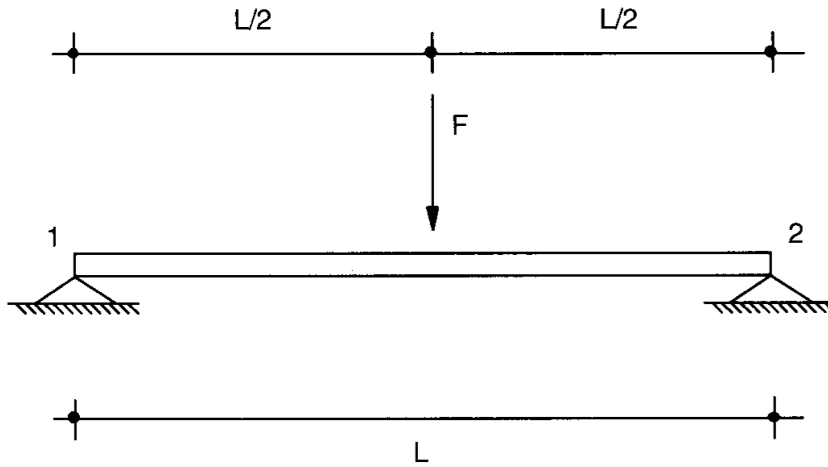


Figura 7.4- Trave appoggiata con forza in mezzeria

### 7.2.2. Trave appoggiata soggetta a carico in mezzeria

Si consideri la trave di Figura 7.4, di sezione costante, caricata da una forza  $F$  in mezzeria. Si vuole calcolare la deformata con il metodo di Ritz.

Le funzioni ammissibili dovranno rispettare le condizioni geometriche agli estremi:

$$v(0) = v(L) = 0 \quad (7.32)$$

Volendo usare i termini delle serie di potenze si avrebbe, in prima approssimazione:

$$v(z) = C_2 z(L - z) \quad (7.33)$$

ma questa scelta — pur perfettamente legittima — conduce a risultati poco corretti. Tra l'altro, l'uso della (7.33) implica un diagramma del momento costante. Molto più opportuno appare l'adoperare la serie trigonometrica, scrivendo, in prima approssimazione:

$$v(z) = C_1 \sin \frac{\pi z}{L} \quad (7.34)$$

e rispettando la simmetria e le condizioni naturali di momento nullo in 0 ed  $L$ . L'energia elastica  $L$  è fornita da:

$$L = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz = \frac{EI}{2} C_1^2 \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L \sin^2 \left( \frac{\pi z}{L} \right) dz = \frac{EI}{4L^3} \pi^4 C_1^2 \quad (7.35)$$

mentre l'energia potenziale è:

$$P = -Fv(L/2) = -FC_1 \quad (7.36)$$

La condizione di stazionarietà dell'energia potenziale totale è allora in grado di definire la coordinata lagrangiana:

$$C_1 = \frac{2FL^3}{EI\pi^4} \quad (7.37)$$

La deformata è approssimata come:

$$v(z) = \frac{2FL^3}{EI\pi^4} \sin \frac{\pi z}{L} \quad (7.38)$$

ed il massimo spostamento si verifica sotto la forza, ossia in  $z = L/2$ :

$$v_c \approx \frac{FL^3}{48.70EI} \quad (7.39)$$

con un errore di circa 1.5% sulla soluzione esatta.

Se si vuole ottenere un'espressione più precisa, si può aggiungere un secondo termine allo sviluppo in serie:

$$v(z) = C_1 \sin \left( \frac{\pi z}{L} \right) + C_3 \sin \left( \frac{3\pi z}{L} \right) \quad (7.40)$$

In questo caso, l'energia elastica può calcolarsi come:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} EI \int_0^L \left[ -C_1 \frac{\pi^2}{L^2} \sin \left( \frac{\pi z}{L} \right) - C_3 \frac{9\pi^2}{L^2} \sin \left( \frac{3\pi z}{L} \right) \right]^2 dz = \\ &= \frac{1}{2} EI \left[ C_1^2 \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L \sin^2 \left( \frac{\pi z}{L} \right) dz + C_3^2 \frac{81\pi^4}{L^4} \int_0^L \sin^2 \left( \frac{3\pi z}{L} \right) dz \right. \\ &\quad \left. + 18C_1 C_3 \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L \sin \left( \frac{\pi z}{L} \right) \sin \left( \frac{3\pi z}{L} \right) dz \right] \end{aligned} \quad (7.41)$$

Ora è noto che valgono le formule di ortogonalità:

$$\int_0^L \sin \left( \frac{m\pi z}{L} \right) \sin \left( \frac{n\pi z}{L} \right) dz = \frac{1}{2} L \delta_{mn} \quad (7.42)$$

con  $\delta_{mn}$  pari al simbolo di Kronecker.

L'energia elastica è:

$$L = \frac{EI\pi^4}{4L^3} (C_1^2 + 81C_3^2) \quad (7.43)$$



L'energia potenziale è invece immediatamente deducibile come:

$$P = -Fv(L/2) = -F(C_1 - C_3) \quad (7.44)$$

Le condizioni di stazionarietà forniscono due equazioni disaccoppiate:

$$\frac{EI\pi^4}{2L^3}C_1 - F = 0 \quad (7.45)$$

$$\frac{81EI\pi^4}{2L^3}C_3 + F = 0 \quad (7.46)$$

da cui la seconda approssimazione della deformata:

$$v(z) = \frac{2FL^3}{\pi^4 EI} \left( \sin \frac{\pi z}{L} - \frac{1}{81} \sin \frac{3\pi z}{L} \right) \quad (7.47)$$

In mezzeria si verifica un abbassamento pari a:

$$v_c = \frac{FL^3}{48.11EI} \quad (7.48)$$

con un errore del 0.23% sulla soluzione esatta. Lungo la trave, l'errore è sempre dello stesso ordine di grandezza, mentre i momenti ed i tagli sono calcolati con minore accuratezza, come illustrato in Figura 7.5.

**Nota 7.1:** Le relazioni di ortogonalità (7.42) permettono di annullare sempre i termini di accoppiamento delle equazioni di Ritz.

Volendo utilizzare il principio degli spostamenti virtuali, si può scegliere il campo di spostamenti (7.34), e scrivere:

$$\int_V \sigma_{33} \delta e_{33} ds = F \delta v(L/2) \quad (7.49)$$

Ma  $e_{33} = -yv''$ ,  $\sigma_{33} = Ee_{33}$ , (cfr. 2.108), e quindi:

$$EI \int_0^L v'' \delta v'' dz = F \delta v(L/2) \quad (7.50)$$

ed ancora:

$$EIC_1 \delta C_1 \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi z}{L} dz = F \delta C_1 \quad (7.51)$$

Svolgendo l'integrale, e sfruttando l'arbitrarietà di  $\delta C_1$ , si giunge a definire la coordinata lagrangiana (7.37).

In seconda approssimazione si può usare il campo di spostamenti:

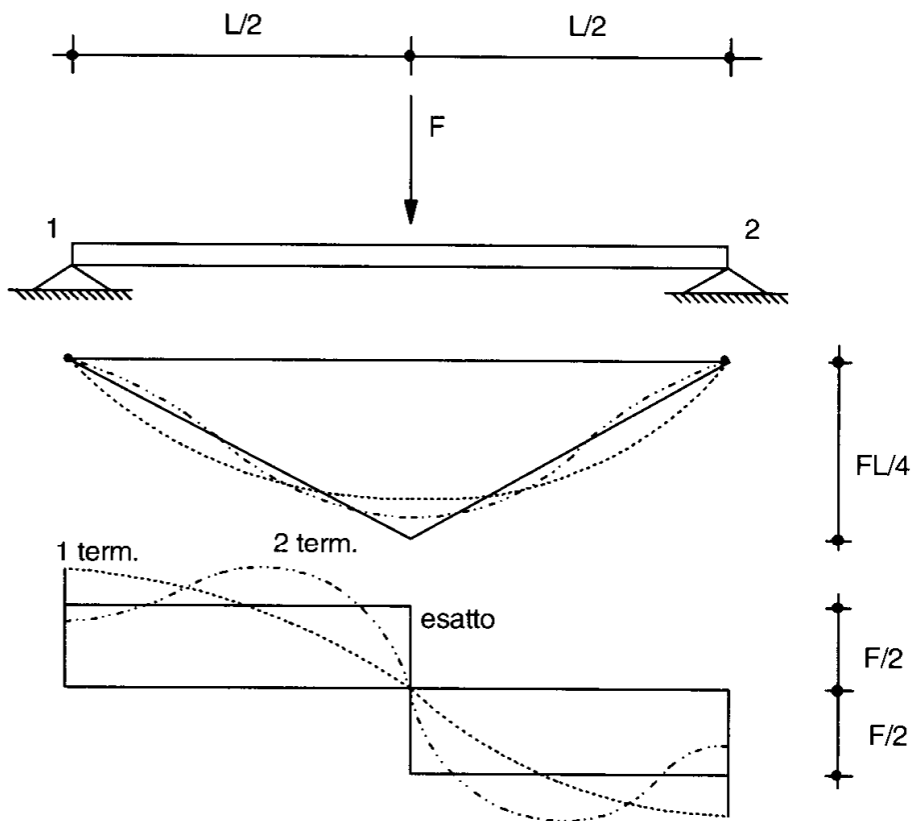


Figura 7.5- Momenti e tagli esatti ed approssimati

$$v(z) = C_1 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) + C_3 \sin\left(\frac{3\pi z}{L}\right) \quad (7.52)$$

sicchè il p.s.v. si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4}{L^4} EI \left[ C_1 \delta C_1 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) dz + 81 C_1 \delta C_3 \int_0^L \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{3\pi z}{L}\right) dz \right. \\ \left. + 9 C_3 \delta C_1 \int_0^L \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \sin\left(\frac{3\pi z}{L}\right) dz + 81 C_3 \delta C_3 \int_0^L \sin^2\left(\frac{3\pi z}{L}\right) dz \right] \\ = F(\delta C_1 - \delta C_3) \end{aligned} \quad (7.53)$$

Sfruttando le relazioni di ortogonalità (7.42) e l'arbitrarietà delle  $\delta C_i$ , si giunge alle equazioni disaccoppiate (7.45, 7.46).

Si cerchi ora la soluzione sotto forma di serie trigonometrica completa:

$$v(z) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi z}{L} \quad (7.54)$$

e come spostamento virtuale si scelga un singolo termine di questa serie:

$$\delta v(z) = \delta C_m \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \quad (7.55)$$

Il p.s.v. si scrive allora, per  $m = 1, 3, \dots$ :

$$EI \int_0^L \left[ \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{L^2} C_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \right] \left[ \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \right] dz = P \delta v(L/2) \quad (7.56)$$

Sfruttando le relazioni di ortogonalità (7.42) si ottengono le equazioni disaccoppiate:

$$C_m \frac{EI \pi^4 m^4 L}{L^4} \frac{L}{2} = \pm P \quad (7.57)$$

dove il segno + vale per  $m = 1, 5, 9 \dots$ , ed il segno - per  $m = 3, 7, 11 \dots$ .  
Quindi:

$$C_m \pm \frac{2PL^3}{EI \pi^4 m^4} \quad (7.58)$$

e la soluzione completa è:

$$v(z) = \frac{2PL^3}{EI \pi^4} \left[ \sum_{i=1,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^4} \sin\left(\frac{i\pi z}{L}\right) - \sum_{i=3,7,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^4} \sin\left(\frac{i\pi z}{L}\right) \right] \quad (7.59)$$

L'abbassamento in mezzeria, misura dell'energia potenziale, è data da:

$$v(L/2) = \frac{2PL^3}{EI \pi^4} \left[ \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^4} \right] \quad (7.60)$$

**Nota 7.2:** Se ne può dedurre che l'energia potenziale è sottostimata, dal metodo di Ritz, e che quindi si opera su strutture più rigide del vero.

**Nota 7.3:** La somma della serie è  $\pi^4/96$ , e l'abbassamento in mezzeria è calcolato con esattezza.

**Nota 7.4:** Si noti infine che la convergenza al valore esatto avviene secondo  $i^{-4}$ .

**Nota 7.5:** Il momento flettente è fornito da:

$$M(z) = -EI v''(z) = \frac{2PL}{\pi^2} \left[ \sum_{i=1,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sin\left(\frac{i\pi z}{L}\right) - \sum_{i=3,7,\dots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sin\left(\frac{i\pi z}{L}\right) \right] \quad (7.61)$$

e quindi converge al valore esatto secondo  $i^{-2}$ , ossia più lentamente dell'abbassamento. Il taglio, infine, converge come  $i^{-1}$ , ed in mezzeria è sempre nullo, laddove invece esiste una discontinuità. Il metodo di Ritz, in questo caso, prevede la media.

### 7.2.3. Trave a mensola soggetta a carico uniforme

Si consideri la trave a mensola di Figura 7.6, di luce  $L$ , a sezione costante, e caricata da una stesa di carico uniformemente distribuita, di intensità  $p$ . Volendo usare un campo di spostamenti polinomiale, si ponga:

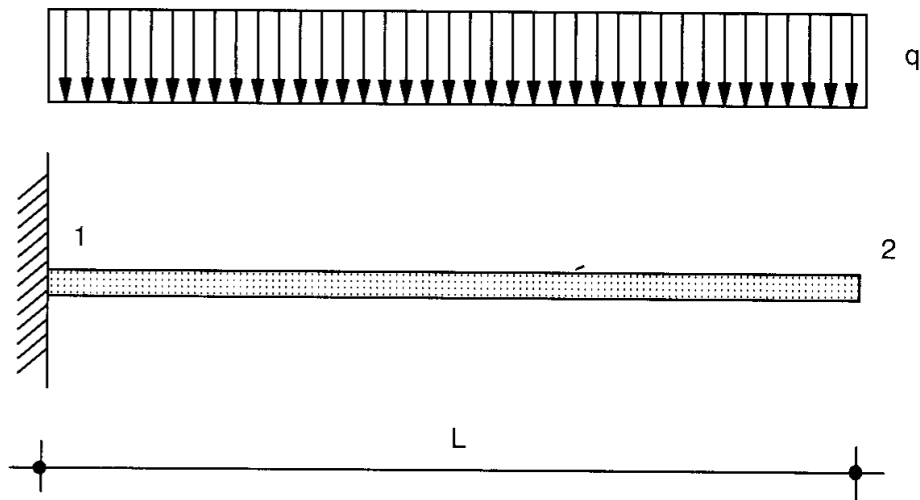


Figura 7.6- Trave a mensola di sezione costante

$$v(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 \quad (7.62)$$

Le condizioni geometriche da soddisfare sono ambedue all'incastro:

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_0 = 0 \quad (7.63)$$

$$v'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (7.64)$$

e quindi il campo di spostamenti è, in prima approssimazione:

$$v(z) = C_2 z^2 + C_3 z^3 \quad (7.65)$$

Le condizioni naturali, viceversa, non sono soddisfatte.

L'energia elastica è:

$$L = \frac{1}{2} EI \int_0^L v''^2 dz = \frac{EI}{2} (4C_2^2 L + 12C_3^2 L^3 + 12C_1 C_2 L^2) \quad (7.66)$$

L'energia potenziale è invece fornita da:

$$P = - \int_0^L p v(z) dz = p C_2 \frac{L^3}{3} + p C_3 \frac{L^4}{4} \quad (7.67)$$

e quindi le condizioni di stazionarietà si scrivono:

$$4LC_2 + 6L^2C_3 - \frac{pL^3}{3EI} = 0 \quad (7.68)$$

$$6L^2C_2 + 12L^3C_3 - \frac{pL^4}{4EI} = 0 \quad (7.69)$$

con soluzione:

$$C_2 = \frac{5pL^2}{24EI} \quad C_3 = -\frac{pL^2}{12EI} \quad (7.70)$$

La deformata è esprimibile come:

$$v(z) = \frac{pL^4}{24EI} \left( \frac{5z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3} \right) \quad (7.71)$$

Lo spostamento all'estremo libero è calcolato con precisione:

$$v(L) = \frac{pL^4}{8EI} \quad (7.72)$$

Se si fosse aggiunto anche un termine quartico al campo di spostamenti (7.65), si sarebbe calcolata con esattezza l'intera funzione spostamento:

$$v(z) = \frac{pL^4}{24EI} \left( \frac{6z^2}{L^2} - \frac{4z^3}{L^3} + \frac{z^4}{L^4} \right) \quad (7.73)$$

#### 7.2.4. Trave a sezione variabile con discontinuità

Si voglia calcolare la deformata approssimata della trave simmetrica, a sezione variabile con discontinuità, della Figura 7.7. La struttura è caricata da una forza concentrata in mezzeria, e si è quindi in presenza di simmetria geometrica e di carico.

Analizzando la sola parte di sinistra della trave, vi sono tre condizioni geometriche da soddisfare:

$$v(0) = 0 \quad (7.74)$$

$$v'(0) = 0 \quad (7.75)$$

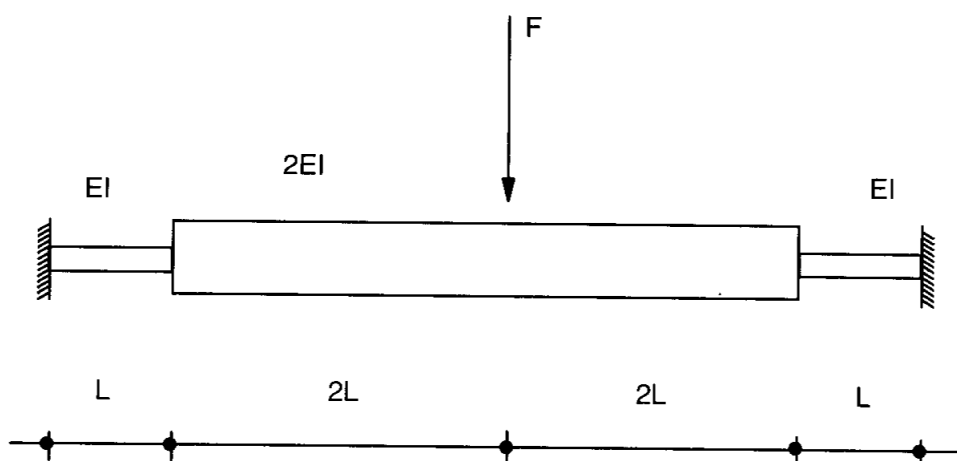


Figura 7.7- Trave incastrata a sezione variabile con discontinuità

$$v'(3L) = 0 \quad (7.76)$$

e quindi il campo di spostamenti polinomiale più semplice sarà:

$$v(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 \quad (7.77)$$

Le prime due condizioni ai limiti impongono  $C_0 = C_1 = 0$ , mentre la terza si scrive:

$$2C_2(3L) + 3C_3(9L^2) = 0 \quad (7.78)$$

da cui:

$$C_3 = -\frac{2}{9L} C_2 \quad (7.79)$$

Il campo di spostamenti è quindi:

$$v(z) = C_2 \left( z^2 - \frac{2z^3}{9L} \right) \quad (7.80)$$

L'energia elastica di tutta la struttura è calcolabile come:

$$L = 2 \frac{EI}{2} \int_0^L v''^2 dz + 2 \frac{2EI}{2} \int_L^{3L} v''^2 dz = \frac{164}{27} EIL C_2^2 \quad (7.81)$$

mentre l'energia potenziale è:

$$P = F v_c = 3C_2 L^2 F \quad (7.82)$$

L'imposizione della stazionarietà conduce a definire la coordinata lagrangiana come:

$$C_2 = \frac{81}{328} \frac{FL}{EI} \quad (7.83)$$

La deformata approssimata è quindi:

$$v(z) = \frac{81}{328} \frac{FL}{EI} \left( z^2 - \frac{2z^3}{9L} \right) \quad (7.84)$$

Al centro:

$$v_c = 0.74085 \frac{FL^3}{EI} \quad (7.85)$$

mentre il valore esatto è:

$$v_c = 0.77085 \frac{FL^3}{EI} \quad (7.86)$$

con un errore del 3.9%.

Il momento flettente è calcolabile dalla formula:

$$M(z) = -EIv''(z) = -\frac{81}{164} FL \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{z}{L} \right) \quad (7.87)$$

per  $z \in [0, L]$

$$M(z) = -2EIv''(z) = -\frac{162}{164} FL \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{z}{L} \right) \quad (7.88)$$

per  $z \in [L, 3L]$ .

Come può osservarsi anche dal grafico di Figura 7.8, il diagramma del momento flettente è discontinuo, perchè il prodotto  $EI$  è discontinuo, ed il campo di spostamenti è stato assunto continuo ed infinitamente derivabile.

Per ottenere un diagramma del momento continuo, occorrerebbe usare un campo di spostamenti continuo, con derivata prima continua, ma con derivata seconda discontinua. In altri termini, si sarebbero potuti usare campi di spostamento diversi in ciascuna delle parti della trave a sezione costante.

### 7.2.5. Ancora l'asta a sezione costante

Si consideri di nuovo l'esempio di figura 7.1, e si cerchi di ottenere un'approssimazione della deformata impiegando due funzioni lineari, una valida da 0 ad  $L/2$ , e l'altra valida da  $L/2$  ad  $L$ :

$$u_1(x_1) = A_0 + A_1x_1 \quad \text{in } [0, L/2] \quad (7.89)$$

$$u_2(x_2) = B_0 + B_1x_2 \quad \text{in } [L/2, L] \quad (7.90)$$

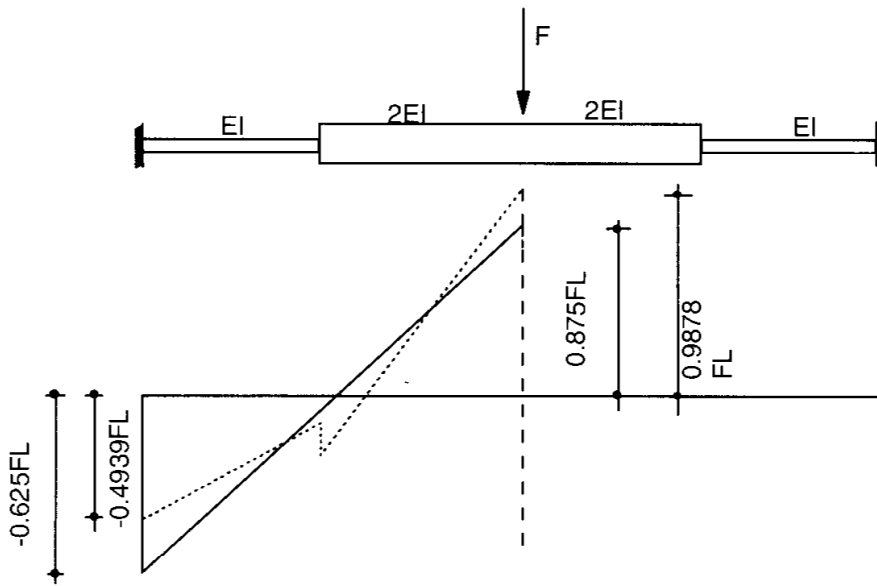


Figura 7.8- Risultati esatti ed approssimati per la trave di figura precedente

La condizione di ammissibilità in  $x_1 = 0$  implica  $A_0 = 0$ . Inoltre il campo di spostamenti globale deve essere continuo, e quindi:

$$u_1(L/2) = u_2(0) \quad (7.91)$$

ossia:

$$A_1 \frac{L}{2} = B_0 \quad (7.92)$$

e la struttura ha, in definitiva, due gradi di libertà.

Si esprimano ora i campi locali di spostamento in funzione degli spostamenti agli estremi:

$$u_1(0) = 0 \quad u_1(L/2) = d_2 \quad (7.93)$$

$$u_2(0) = d_2 \quad u_2(L/2) = d_3 \quad (7.94)$$

e quindi:

$$A_0 = 0 \quad A_1 \frac{L}{2} = d_2 \quad (7.95)$$



$$B_0 = d_2 \quad B_0 + B_1 \frac{L}{2} = d_3 \quad (7.96)$$

Gli spostamenti sono quindi espressi, in funzione degli spostamenti nodali, da:

$$u_1(x_1) = d_2 \left( \frac{2}{L} x_1 \right) \quad (7.97)$$

$$u_2(x_2) = d_2 \left( 1 - \frac{2}{L} x_2 \right) + d_3 \left( \frac{2}{L} x_2 \right) \quad (7.98)$$

Si può ora calcolare l'energia potenziale totale associata a ciascuna regione, e poi sommare i contributi:

Per la regione A si ottiene:

$$L^A = \frac{EA}{2} \int_0^{L/2} u'^2(x) dx = \frac{EA}{L} d_2^2 \quad (7.99)$$

$$P^A = \int_0^{L/2} pu(x) dx = \frac{pL}{4} d_2 \quad (7.100)$$

Per la regione B si ha:

$$L^B = \frac{EA}{2} \int_0^{L/2} u'^2(x) dx = \frac{EA}{L} (d_2^2 + d_3^2 - 2d_2d_3) \quad (7.101)$$

$$P^B = \int_0^{L/2} pu(x) dx = \frac{pL}{4} (d_2 + d_3) \quad (7.102)$$

L'energia potenziale totale dell'intera struttura è quindi:

$$F(u) = L^A + L^B - P^A - P^B = \frac{EA}{L} (2d_2^2 + d_3^2 - 2d_2d_3) - \frac{pL}{4} (2d_2 + d_3) \quad (7.103)$$

e le condizioni di stazionarietà si scrivono:

$$\frac{EA}{L} (4d_2 - 2d_3) - \frac{pL}{2} = 0 \quad (7.104)$$

$$\frac{EA}{L} (-2d_2 + 2d_3) - \frac{pL}{4} = 0 \quad (7.105)$$

La soluzione è:

$$d_2 = \frac{3}{8} \frac{pL^2}{EA} \quad (7.106)$$

$$d_3 = \frac{1}{2} \frac{pL^2}{EA} \quad (7.107)$$

ed ambedue questi valori sono esatti.

Il paragone tra il campo di spostamenti approssimato e quello esatto è riportato in Figura 7.9.

**Nota 7.6:** Il metodo può essere esteso ad un numero arbitrario di sotto-regioni.

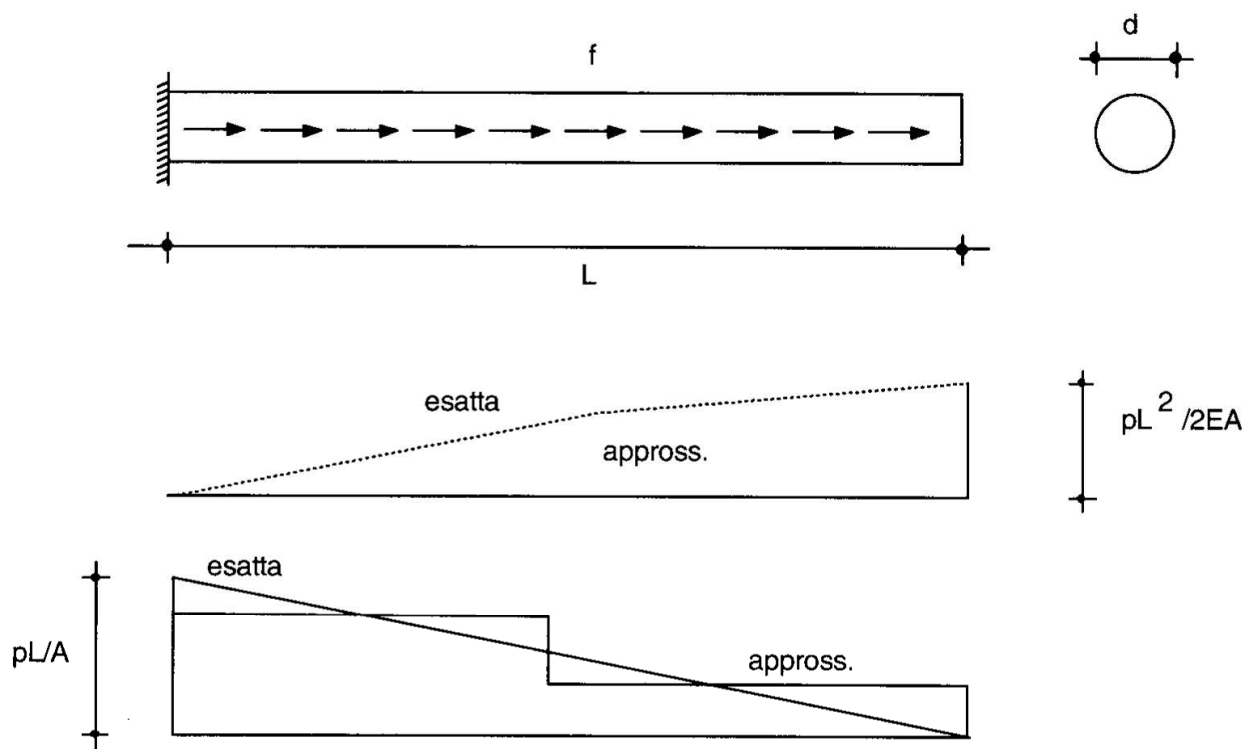


Figura 7.9- Asta a sezione costante — Risultati a confronto

### 7.3. Il metodo di Rayleigh–Ritz per il calcolo dei carichi critici

Un'ulteriore interessante campo di applicazione del metodo di Ritz è nella ricerca dei moltiplicatori critici per travi soggette a sforzi assiali di compressione.

Si consideri ad esempio la trave appoggiata di Figura 7.10, di sezione costante, e soggetta ad una forza di compressione all'estremo di sinistra. L'energia potenziale totale si scrive:

$$F(v) = \frac{EI}{2} \int_0^L v''^2(z) dz - \frac{F}{2} \int_0^L v'^2(z) dz \quad (7.108)$$

Esprimendo la deformata in serie completa (7.54), l'energia potenziale totale diviene, sfruttando anche le condizioni di ortogonalità (7.42):

$$F(v) = \frac{EI \pi^4}{4 L^3} \sum_{i=1}^{\infty} i^4 C_i^2 - \frac{F \pi^2}{4L} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 C_i^2 \quad (7.109)$$

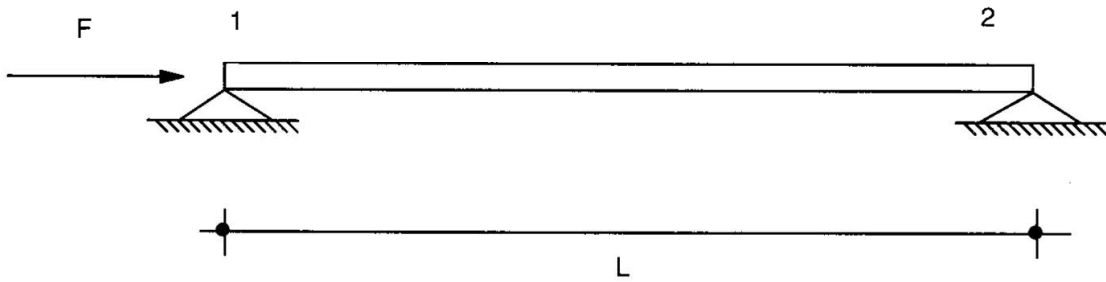


Figura 7.10- Trave appoggiata con forza assiale

Le condizioni di stazionarietà:

$$\frac{\partial F}{\partial C_i} = 0 \quad (7.110)$$

conducono alle equazioni disaccoppiate:

$$\left( \frac{EI}{2L^3} \pi^4 i^4 - \frac{F}{2L} \pi^2 i^2 \right) C_i = 0 \quad (7.111)$$

La soluzione banale, corrispondente a trave rettilinea, esiste sempre. Inoltre, soluzioni non banali esistono in corrispondenza dei valori (critici) del carico assiale:

$$F_i = i^2 \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (7.112)$$

In questo caso, quindi, essendosi usata la serie trigonometrica completa, si sono ottenuti risultati esatti.

Si consideri invece la trave a mensola di Figura 7.11, soggetta a carico assiale nell'estremo libero di destra, e si voglia calcolare, in prima approssimazione, il moltiplicatore critico di questa forza.

Usando il campo di spostamento:

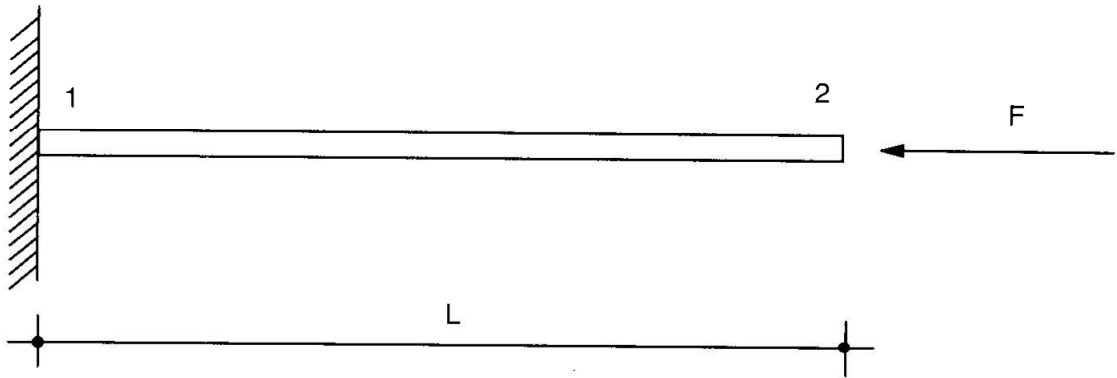


Figura 7.11- Trave a mensola con forza assiale all'estremo libero

$$v(z) = C_2 z^2 \quad (7.113)$$

si ha l'energia potenziale totale:

$$F(v) = \frac{EI}{2} \int_0^L v''^2(z) dz - \frac{F}{2} \int_0^L v'^2(z) dz = 2EIC_2^2 L - 2FC_2^2 \frac{L^3}{3} \quad (7.114)$$

La condizione di stazionarietà conduce a:

$$\left( 4EIL - \frac{4}{3}FL^3 \right) C_2 = 0 \quad (7.115)$$

e di conseguenza la prima approssimazione del carico critico è:

$$F_{crit}^{(1)} = 3 \frac{EI}{L} \quad (7.116)$$

Operando in seconda approssimazione, occorre usare il campo di spostamenti:

$$v(z) = C_2 z^2 + C_3 z^3 \quad (7.117)$$

e quindi l'energia potenziale totale diviene:

$$F(v) = \frac{EI}{2} (4C_2^2 L + 12C_3^2 L^3 + 12C_2 C_3 L^2) - \frac{F}{2} \left( \frac{4}{3} C_2^2 L^3 + \frac{9}{5} C_3^2 L^5 + 3C_2 C_3 L^4 \right) \quad (7.118)$$

Le condizioni di stazionarietà conducono al sistema omogeneo di due equazioni nelle due incognite  $C_2$  e  $C_3$  :

$$\begin{pmatrix} 4EIL - \frac{4}{3}FL^3 & 6EIL^2 - \frac{3}{2}FL^4 \\ 6EIL^2 - \frac{3}{2}FL^4 & 12EIL^3 - \frac{9}{5}FL^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (7.119)$$

Al di là della soluzione banale  $C_i = 0$ , si ottengono soluzioni non nulle, e definite a meno di una costante, quando il determinante è nullo, ossia per:

$$12 - \frac{26}{5}k + \frac{3}{20}k^2 = 0 \quad (7.120)$$

avendo posto:

$$k = \frac{FL^2}{EI} \quad (7.121)$$

Le radici della (7.120) sono pari a 2.4859 e 32.1807, e quindi il carico critico è sovrastimato dello 0.75% rispetto al valore esatto ( $\pi^2/4$ ).

## 7.4. L'uso dei quozienti di Rayleigh e Timoshenko

Spesso è utile calcolare il primo carico critico di una struttura tramite l'uso di due opportuni quozienti, risalenti rispettivamente a Rayleigh ed a Timoshenko. Per definire il quoziente di Rayleigh, si consideri l'energia potenziale totale (7.108), e si definisca *quoziente di Rayleigh*  $P(v)$  il rapporto:

$$P(v) = \frac{\int_0^L EI v''^2(z) dz}{\int_0^L v'^2(z) dz} \quad (7.122)$$

Analogamente, si consideri l'energia complementare totale:

$$S(v) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dz - \frac{1}{2} \int_0^L F v'^2 dz \quad (7.123)$$

e si definisca il *quoziente di Timoshenko*:

$$T(v) = \frac{\int_0^L EI v'^2(z) dz}{\int_0^L M^2(z) dz} \quad (7.124)$$

Scegliendo per  $v(z)$  una funzione ammissibile si ottengono, tramite i due rapporti su definiti, due approssimazioni del primo carico critico.

### 7.4.1. Trave a mensola di sezione costante

Si consideri l'esempio precedente, con campo di spostamento:

$$v(z) = z^2 \quad (7.125)$$

Il quoziente di Rayleigh fornisce subito:

$$P(v) = \frac{4EIL}{4/3L^3} = \frac{3EI}{L} \quad (7.126)$$

così come ottenuto in precedenza con il metodo di Ritz.  
Il momento flettente  $M(z)$  è fornito da (Figura 7.12):

$$M(z) = F[v(L) - v(z)] \quad (7.127)$$

e quindi il quoziente di Timoshenko si scrive:

$$T(v) = \frac{4/3EIL^3}{8/15L^5} = \frac{15}{6} \frac{EI}{L^2} = 2.5 \frac{EI}{L^2} \quad (7.128)$$

Il valore esatto del carico critico è  $\pi^2/4 \approx 2.4674$ , e quindi il rapporto di Timoshenko, in questo caso, fornisce risultati migliori del rapporto di Rayleigh.

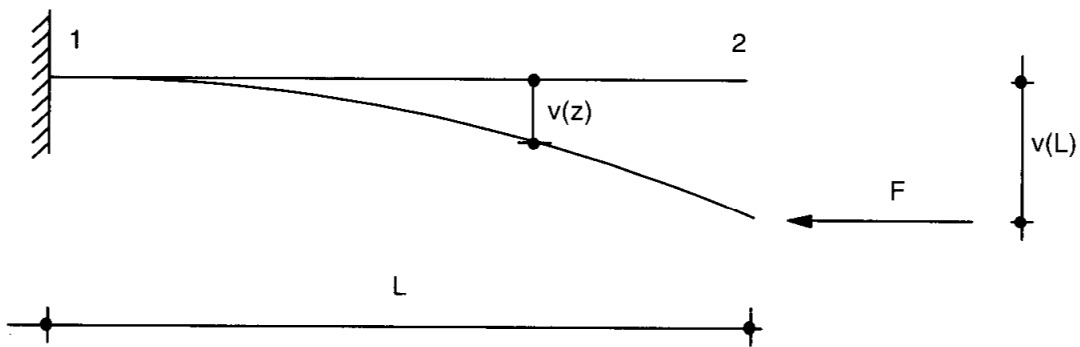


Figura 7.12- Momento flettente per trave a mensola soggetta a forza assiale di compressione

#### 7.4.2. Trave a mensola con sezione variabile con discontinuità

Si consideri la trave a mensola di Figura 7.13, soggetta al carico assiale di intensità  $4F$  in mezzeria, ed al carico assiale di intensità  $F$  all'estremo di destra.

Il quoziente di Rayleigh è pari a:

$$P(v) = \frac{2EI \int_0^{L/2} v''^2 dz + EI \int_{L/2}^L v''^2 dz}{4 \int_0^{L/2} v'^2 dz + \int_{L/2}^L v'^2 dz} \quad (7.129)$$

Si scelga inizialmente il campo di spostamenti:

$$v(z) = z^2, \quad (7.130)$$

ottenendo:

$$P(v) = \frac{6EIL}{2L^3} = 3\frac{EI}{L^2} \quad (7.131)$$

contro un valore esatto di circa  $2.53EI/L^2$ .

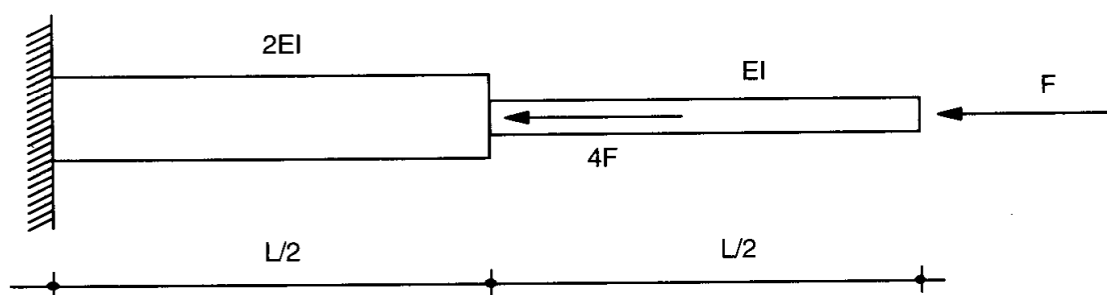


Figura 7.13- Trave a mensola con due forze assiali

Si scelga ora una funzione di spostamento più elaborata:

$$v(z) = z^2 - \frac{z^4}{6L^2} \quad (7.132)$$

da cui:

$$\int v'^2(z) dz = \frac{4}{3} z^3 + \frac{4}{63} \frac{z^7}{L^4} - \frac{8}{15} \frac{z^5}{L^2} \quad (7.133)$$

e:

$$\int v''^2(z) dz = 4 \left( z + \frac{z^5}{5L^4} - \frac{2}{3} \frac{z^3}{L^2} \right) \quad (7.134)$$

Il quoziente di Rayleigh, quindi, fornisce:

$$P(v) = \frac{3.82499}{1.46547} \frac{EI}{L^2} \approx 2.61 \frac{EI}{L^2} \quad (7.135)$$

valore notevolmente vicino al valore esatto.

## 7.5. Il metodo di Rayleigh–Schmidt

Una variante del metodo del quoziente di Rayleigh fu originariamente proposta dallo stesso Rayleigh [1894], per essere poi negletta, fino alla sua riscoperta ad opera di R. Schmidt [1981, 1982, 1985, 1988, 1989], W. Bert [1984a, 1987] ed I. Elishakoff [1987a, 1987b, 1988].

Secondo tale metodo, il campo di spostamenti  $v(z)$  dipende da un parametro incognito. Di conseguenza, il rapporto di Rayleigh (o il rapporto di Timoshenko), sono funzioni di tale parametro incognito. Si calcola quindi il valore del parametro minimizzando il quoziente in oggetto, ed ottenendo ottime approssimazioni del carico critico.

Considerando ad esempio la trave a mensola di figura 7.11, a sezione costante, si può utilizzare il campo di spostamento:

$$v(z) = z^2 + kz^3 \quad (7.136)$$

ed il quoziente di Rayleigh diviene:

$$P(v, k) = \frac{60(3k^2L^2 + 3kL + 1) EI}{27k^2L^2 + 45kL + 20} \frac{EI}{L} \quad (7.137)$$

Minimizzando rispetto a  $k$  si deve imporre:

$$\frac{dP}{dk} = 0 \quad (7.138)$$

e quindi  $k$  dovrà essere radice dell'equazione:

$$18k^2L^2 + 22kL + 5 = 0 \quad (7.139)$$

Si hanno le due soluzioni:

$$(kL)_1 = \frac{-11 - \sqrt{31}}{18} \quad (kL)_2 = \frac{-11 + \sqrt{31}}{18} \quad (7.140)$$

In corrispondenza di  $(kL)_2$  si ottiene il minimo quoziente di Rayleigh:

$$P \approx 2.48596 \frac{EI}{L^2} \quad (7.141)$$

da paragonare al valore esatto di circa 2.4674. Si noti che il risultato ottenuto è lo stesso cui si giunge usando il metodo di Rayleigh – Ritz con campo di spostamento a due termini.

Il quoziente di Timoshenko, con lo stessa funzione approssimante, vale:

$$T(v, k) = \frac{14(27k^2L^2 + 45kL + 20) EI}{135k^2L^2 + 245kL + 112} \frac{EI}{L^2} \quad (7.142)$$



e minimizzando rispetto a  $k$  si ottiene l'equazione:

$$135k^2L^2 + 162kL + 35 = 0 \quad (7.143)$$

con radici:

$$(kL)_1 = \frac{-9\sqrt{3} - 2\sqrt{17}}{15\sqrt{3}} \quad (kL)_2 = \frac{-9\sqrt{3} + 2\sqrt{17}}{15\sqrt{3}} \quad (7.144)$$

Per  $k = k_1$  si ottiene:

$$T \approx 2.468044 \frac{EI}{L^2} \quad (7.145)$$

appena 0.026% più alto del valore esatto.

Scegliendo un campo di spostamenti pari a:

$$v(z) = z^2 + kz^4 \quad (7.146)$$

il quoziente di Rayleigh diviene:

$$P(v, k) = \frac{21(36k^2L^2 + 20kL + 5)}{60k^2L^4 + 84kL^2 + 35} \frac{EI}{L} \quad (7.147)$$

Minimizzando rispetto a  $kL^2$  si giunge all'equazione:

$$228k^2L^4 + 240kL^2 + 35 = 0 \quad (7.148)$$

con radici:

$$k_{1,2} = \frac{-20\sqrt{13} \pm \sqrt{535}}{38\sqrt{3}} \frac{1}{L^2} \quad (7.149)$$

Per  $k = k_2$  si ottiene il valore del carico critico:

$$P \approx 2.46877 \frac{EI}{L^2} \quad (7.150)$$

solo 0.057% più alto del valore esatto.

Il quoziente di Timoshenko fornisce:

$$T(v, k) = \frac{3(60k^2L^4 + 84kL^2 + 35)}{2(28k^2L^4 + 48kL^2 + 21)} \frac{EI}{L} \quad (7.151)$$

e la condizione di minimo fornisce:

$$132k^2L^4 + 140kL^2 + 21 = 0 \quad (7.152)$$

con radici:

$$k_{1,2} = \frac{-35 \pm \sqrt{532}}{66} \frac{1}{L^2} \quad (7.153)$$

Per  $k = k_2$  si ottiene:

$$T \approx 2.467437 \frac{EI}{L^2} \quad (7.154)$$

ossia un risultato  $1.47 \times 10^{-3}$  più alto del valore effettivo.

Come ultimo esempio, si esamini la trave a mensola di figura 7.13, e si scelga come campo di spostamenti la funzione:

$$v(z) = \left( z^2 - \frac{z^4}{6L^2} \right) + k \left( z^2 - \frac{z^6}{15L^4} \right) \quad (7.155)$$

Si ottiene il quoziente di Rayleigh:

$$P(v, k) = \frac{4455(2387k^2 + 4232kL + 1904)}{3944799k^2 + 7149560k + 3249840} \frac{EI}{L^2} \quad (7.156)$$

che minimizzato rispetto a  $k$  conduce all'equazione:

$$23225647k^2 + 30808848k + 8785040 = 0 \quad (7.157)$$

con radici:

$$k_1 = -0.41495 \quad k_2 = -0.91155 \quad (7.158)$$

In corrispondenza di  $k = k_1$  si ottiene il valore minimo del quoziente di Rayleigh:

$$P \approx 2.58744 \frac{EI}{L^2} \quad (7.159)$$

da paragonare al valore esatto di circa 2.53.

## 7.6. Il metodo dei minimi quadrati ed il metodo di Galerkin

Il metodo di Galerkin rientra nella più generale classe dei *metodi dei residui pesati*. Si immagini di conoscere l'equazione differenziale della linea elastica:

$$\mathcal{L}(v(z)) = f(z) \quad (7.160)$$

ma che non si sappia come risolverla in via esatta. Si scelga allora una funzione approssimante, che soddisfi *sia le condizioni geometriche che le condizioni naturali*:

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i \quad (7.161)$$

e la si sostituisca nell'equazione della linea elastica.

L'equazione differenziale ovviamente non sarà identicamente soddisfatta, e quindi si avrà un *residuo*  $R$ :

$$R = \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i \right) - f(z) \quad (7.162)$$

Secondo il metodo dei residui pesati, la 'migliore' soluzione si ottiene minimizzando l'integrale del residuo *pesato* esteso al dominio del problema. Se quindi la funzione peso è  $\rho$ , allora l'equazione da soddisfare sarà:

$$\int_V R \rho dv = 0 \quad (7.163)$$

La funzione  $\rho$  può essere scelta in più modi. Secondo il metodo più semplice può porsi  $\rho = 1$ , e quindi imporre:

$$\int_V R dv = \int_V \left[ \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i \right) - f(z) \right] dv \quad (7.164)$$

Nel metodo dei *minimi quadrati* le costanti  $A_i$  vengono definite in modo che sia minimo l'integrale:

$$\int_V R^2 dv = \int_V \left[ \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i \right) - f(z) \right]^2 dv \quad (7.165)$$

Derivando rispetto ad  $A_i$  si ottiene:

$$\int_V \left[ \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i \right) - f(z) \right] \mathcal{L}(\varphi_i) dv = 0 \quad (7.166)$$

Si hanno quindi  $n$  equazioni lineari nelle  $n$  incognite  $\varphi_i$ , ed il peso è  $\rho = \mathcal{L}(\varphi_i)$ .

Una terza scelta conduce al *metodo di Galerkin*, secondo cui la funzione peso  $\rho$  è pari alla funzione  $\varphi_i$ . Si ottengono quindi le equazioni:

$$\int_V \left[ \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i \right) - f(z) \right] \varphi_i dv = 0 \quad (7.167)$$

Come primo esempio, si consideri l'asta di figura 7.1, assumendo come campo di spostamenti la funzione polinomiale:

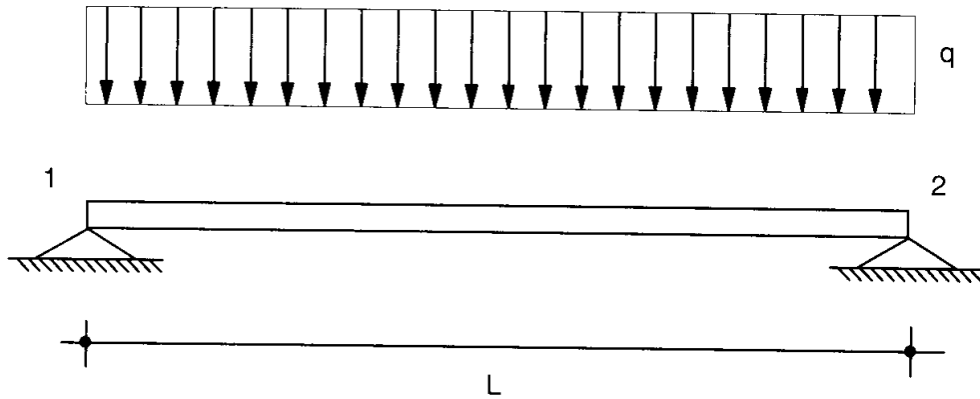


Figura 7.14- Trave appoggiata soggetta a carico distribuito

$$u(x) = C_1x + C_2x^2 \quad (7.168)$$

Per soddisfare la condizione naturale  $\sigma_x(L) = 0$ , dovrà essere:

$$u'(L) = C_1 + 2C_2L = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{C_1}{2L} \quad (7.169)$$

e quindi il campo di spostamenti sarà:

$$u(x) = C_1 \left( x - \frac{x^2}{2L} \right) \quad (7.170)$$

Sostituendo questa espressione nella equazione della linea elastica:

$$EAu'' = f \quad (7.171)$$

si ottiene il residuo:

$$R = -\frac{C_1EA}{L} - f \quad (7.172)$$

Scegliendo  $\rho = 1$  si ha la condizione:

$$\int_0^L \left( \frac{C_1EA}{L} + f \right) dx = 0 \quad (7.173)$$

che conduce a:

$$C_1 = \frac{fL}{EA} \quad (7.174)$$

In questo caso, quindi, si riottiene la soluzione esatta.

Come secondo esempio, si consideri la trave appoggiata di Figura 7.14, soggetta al carico uniformemente distribuito  $q$ .

L'equazione della linea elastica è:

$$EIv'''' = q \quad (7.175)$$

Scelto il campo di spostamento:

$$v(z) = C_1 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (7.176)$$

il residuo diviene:

$$R = \frac{\pi^4}{L^4} EIC_1 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) - q \quad (7.177)$$

Assumendo  $\rho = 1$  si ottiene la condizione:

$$\int_0^L \left[ \frac{\pi^4}{L^4} EIC_1 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) - q \right] dz = 0 \quad (7.178)$$

che conduce a definire la coordinata lagrangiana  $C_1$  come:

$$C_1 = \frac{qL^4}{2\pi^3 EI} \approx 0.01612719 \frac{qL^4}{EI} \quad (7.179)$$

L'errore è considerevole, essendo di circa il 24%.

Secondo Galerkin, invece, la condizione da scrivere è:

$$\int_0^L \left[ \frac{\pi^4}{L^4} EIC_1 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) - q \right] \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) dz = 0 \quad (7.180)$$

che conduce alla coordinata lagrangiana:

$$C_1 = \frac{4qL^4}{\pi^5 EI} \approx 0.01307298 \frac{qL^4}{EI} \quad (7.181)$$

L'errore è questa volta del solo 0.4%.

Volendo ottenere la seconda approssimazione della deformata, si ponga:

$$v(z) = C_1 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) + C_2 \sin\left(\frac{3\pi z}{L}\right) \quad (7.182)$$

e si scrivano le equazioni di Galerkin:

$$\int_0^L \left[ \frac{\pi^4 EIC_1}{L^4} \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) + \frac{\pi^4 EIC_2}{L^4} \sin\left(\frac{3\pi z}{L}\right) - q \right] \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) dz = 0 \quad (7.183)$$

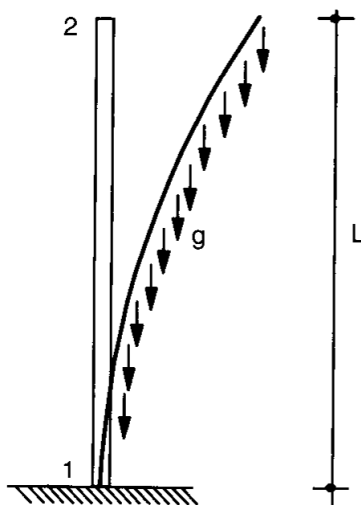


Figura 7.15- Mensola soggetta al peso proprio

$$\int_0^L \left[ \frac{\pi^4 EIC_1}{L^4} \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) + \frac{\pi^4 EIC_2}{L^4} \sin\left(\frac{3\pi z}{L}\right) - q \right] \sin\left(\frac{3\pi z}{L}\right) dz = 0 \quad (7.184)$$

Le proprietà di ortogonalità (7.42) conducono a due equazioni disaccoppiate. La prima fornisce di nuovo il valore (7.181), mentre la seconda definisce la seconda coordinata lagrangiana come:

$$C_2 = \frac{4qL^4}{243\pi^5 EI} \quad (7.185)$$

La deformata è quindi:

$$v(z) = \frac{qL^4}{EI\pi^5} \left( 4 \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) + \frac{4}{243} \sin\left(\frac{3\pi z}{L}\right) \right) \quad (7.186)$$

L'abbassamento in mezzzeria è quindi pari a:

$$v(L/2) = \frac{968}{243} \frac{qL^4}{EI\pi^5} \quad (7.187)$$

con una discrepanza del 0.0275% dal valore esatto (5/384).

Come primo esempio di calcolo del carico critico, si consideri la trave a mensola soggetta al peso proprio  $g$ , come illustrato in Figura 7.15.

L'equazione differenziale della linea elastica è data da:

$$EI \frac{d^4 v}{d\zeta^4} + g \frac{d}{d\zeta} \left[ (1 - \zeta) \frac{dv}{d\zeta} \right] = 0 \quad (7.188)$$

con  $\zeta = z/L$ .

Si assuma come campo di spostamento il primo dei polinomi di Duncan [1937]:

$$v(\zeta) = 2\zeta^2 - \frac{4}{3}\zeta^3 + \frac{1}{3}\zeta^4 \quad (7.189)$$

che soddisfa tutte le condizioni ai limiti.

L'equazione di Galerkin si scrive:

$$\int_0^L \{EI v'''' + g[(1 - \zeta)v']'\} v(\zeta) d\zeta = 0 \quad (7.190)$$

dove questa volta l'apice indica derivazione rispetto all'ascissa non dimensionale  $\zeta$ . Svolgendo gli integrali, si giunge a determinare il  $g_{crit}$  come:

$$g_{crit} = 8 \frac{EI}{L^3} \quad (7.191)$$

contro un valore esatto, calcolabile in termini di funzioni di Bessel, pari a:

$$g_{crit} \approx 7.83734 \frac{EI}{L^3} \quad (7.192)$$

Come secondo ed ultimo esempio, si calcoli una approssimazione del carico critico per una trave appoggiata agli estremi, di sezione retta con momento d'inerzia variabile secondo la legge:

$$I(\zeta) = I_0(1 + \zeta) \quad (7.193)$$

Scegliendo come campo di spostamento il primo polinomio di Duncan [1937]:

$$v(\zeta) = \zeta - 2\zeta^3 + \zeta^4 \quad (7.194)$$

occorre sostituire quest'espressione nell'equazione differenziale della linea elastica:

$$(EI_0(1 + \zeta)v'')'' + PL^2 v'' = 0 \quad (7.195)$$

moltiplicare la (7.195) per  $v(\zeta)$ , integrare tra 0 ed 1, ed uguagliare a 0:

$$\int_0^1 \left[ (EI_0(1 + \zeta)v'')'' + PL^2 v'' \right] v(\zeta) d\zeta = 0 \quad (7.196)$$

Il risultato è raggiunto dopo alcuni semplici passaggi:

$$P_{crit} = \frac{252}{17} \frac{EI_0}{L^2} = 14.8235 \frac{EI_0}{L^2} \quad (7.197)$$

## 7.7. Il metodo di Galerkin–Schmidt

Analogamente a quanto detto per il metodo di Rayleigh, anche il metodo di Galerkin può essere generalizzato ‘alla Schmidt’, esprimendo il campo di spostamento in termini di un parametro incognito:

$$v(z) = v_1(z) + kv_2(z) \quad (7.198)$$

Il parametro viene poi determinato in modo da minimizzare l’espressione del carico critico.

Si consideri come esempio la trave di figura 7.15, e si usi come campo di spostamento la funzione:

$$v(z) = \psi_1 + k\psi_2 \quad (7.199)$$

dove i  $\psi$  sono i polinomi di Duncan:

$$\psi_j(\zeta) = \frac{1}{6}(j+2)(j+3)\zeta^{j+1} - \frac{1}{3}j(j+3)\zeta^{j+2} + \frac{1}{6}j(j+1)\zeta^{j+3} \quad (7.200)$$

L’equazione di Galerkin fornisce:

$$g = \frac{72(25k^2 + 35k + 21)}{7(25k^2 + 50k + 27)} \frac{EI}{L^3} \quad (7.201)$$

Minimizzando  $g$  rispetto a  $k$  si ottiene l’equazione:

$$25k^2 + 20k - 7 = 0 \quad (7.202)$$

con radici:

$$k_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{11} - 2}{5} \quad (7.203)$$

La radice  $k_2 = 0.2633$  conduce al carico critico:

$$g_{crit} \approx 7.84318 \frac{EI}{L^3} \quad (7.204)$$

che è solo 0.0745% più alto del valore esatto.



Infine, la trave appoggiata con momento d'inerzia variabile secondo la legge (7.193) può essere esaminata secondo Galerkin-Schmidt adottando un campo di spostamenti:

$$v(\zeta) = \chi_1 + k\chi_2 \quad (7.205)$$

dove  $\chi_1$  è fornito dalla (7.194) e:

$$\chi_2(\zeta) = 4\zeta^3 - 7\zeta^4 + 3\zeta^5 \quad (7.206)$$

L'equazione di Galerkin resta la (7.196), ma i calcoli divengono notevolmente più laboriosi. Si giunge infine alla relazione:

$$g = \frac{6(53k^2 + 52k + 42)}{8k^2 + 17k + 17} \frac{EI_0}{L^2} \quad (7.207)$$

La condizione di minimo  $dP/dk = 0$  fornisce:

$$97k^2 + 226k + 34 = 0 \quad (7.208)$$

con radici:

$$k_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{9471} - 113}{97} \quad (7.209)$$

La radice negativa conduce al carico critico:

$$P_{crit} \approx 14.5132 \frac{EI_0}{L^2} \quad (7.210)$$

## 7.8. Note bibliografiche

Prima dell'avvento del metodo degli elementi finiti i metodi di Ritz e Galerkin erano virtualmente gli unici approcci praticamente perseguibili al fine di calcolare deformate, carichi critici, frequenze e modi di vibrare. Di conseguenza, si hanno innumerevoli applicazioni ai più svariati campi dell'ingegneria, a partire dalle classiche investigazioni di Timoshenko [1928, 1934, 1940 e.g.], in cui la metodologia di Ritz viene sistematicamente utilizzata in problemi di torsione di travi, di spostamenti di piastre e cupole, e di vibrazioni di sistemi mono e bi-dimensionali. In Italia non si possono tacere i risultati di Krall [1970], pur sempre limitati ai sistemi conservativi.

L'estensione del metodo di Ritz ai casi non conservativi è dovuta a Leipholz [1969, 1970, 1974, 1977], così come l'estensione del metodo di Galerkin al caso in cui le funzioni approssimanti non soddisfano le condizioni naturali al contorno.

Una analisi matematica rigorosa è contenuta in Mikhlin [1971], dove sono anche presentate in rigore le condizioni atte a garantire la convergenza al vero dei metodi di Ritz e Galerkin, nonché la loro stabilità numerica.

Il metodo di Ritz è stato poi proficuamente utilizzato, agli albori degli elementi finiti, per fornire giustificazioni teoriche a disinvolute discretizzazioni (cfr. ad esempio Birkhoff et al. [1966]), giungendo a definire l'approccio agli elementi finiti niente altro che un *metodo di Ritz a pezzi*. Il metodo di Galerkin ha poi permesso di estendere l'analisi con gli elementi finiti ai problemi per cui non esisteva un principio variazionale, ampliandone enormemente le potenzialità. (Si veda Hughes [1987]).

Attualmente il campo di applicazione dei metodi di Ritz e di Galerkin sembra essersi ristretto a quei casi in cui si vogliono formule semplici, seppure approssimate, per il calcolo di spostamenti, carichi critici e frequenze. Da questo punto di vista, i più potenti approcci alla Schmidt sembrano da preferire. Cronologicamente, la riscoperta del metodo di Rayleigh è dovuta a Schmidt [1981, 1982, 1985, 1988, 1989], mentre interessanti applicazioni ai più disparati campi strutturali sono attribuibili a Laura ed alla sua scuola (Bambill e Laura [1989], Ercoli et al. [1985], Laura et al. [1988]), ad Elishakoff [1987a, 1987b], Elishakoff e Pellegrini [1987], Elishakoff e Bert [1988]. Di quest'ultimo è anche un completo review (Bert [1987]) di tutte le applicazioni fino al 1987, e due lavori sulla statica, la dinamica [1984b] e la stabilità [1984b]. Infine, si segnala il tentativo di utilizzare il metodo di Schmidt come fondamento di una tecnica agli elementi finiti (Bert e Newberry [1986]).