

9. Elementi finiti monodimensionali raffinati

I due elementi finiti ‘di base’, introdotti nel capitolo precedente, permettono lo studio di una qualsiasi struttura monodimensionale, ad asse rettilineo o ad asse curvo, con elementi a sezione costante o variabile secondo una legge arbitraria. Ed infatti un elemento strutturale ad asse curvo può essere approssimato con una successione di elementi rettilinei, così come un elemento a sezione variabile può approssimarsi con una successione di elementi a sezione costante.

D’altro canto, è evidente che simili operazioni hanno un peso elevato, sia da un punto di vista computazionale (maggior numero di incognite lagrangiane, e maggior tempo di calcolo) sia da un punto di vista umano (maggior tempo di preparazione dei dati di ingresso, con conseguente maggiore probabilità di errori).

Esistono due vie per aggirare le difficoltà menzionate. Si possono seguire i dettami dell’analisi matriciale classica, e giungere alla matrice di rigidezza esatta per una trave a sezione variabile secondo una certa legge (cfr. cap.5), oppure per una trave curva secondo una certa curvatura (ad esempio per una trave ad asse circolare), e quindi utilizzare questa matrice, calcolata *ad hoc*, nell’ambito dei particolari problemi in cui compaiono quei particolari tipi strutturali. Però è evidente la limitata utilizzazione di un tale procedimento, che presuppone lo studio preliminare dell’elemento.

Si può invece assegnare una legge generale di variabilità della sezione, o della curvatura, ed usare le funzioni di forma ‘di base’ per ottenere la matrice di rigidezza approssimata dell’elemento finito in esame. Questa matrice di rigidezza potrà poi essere utilizzata al posto della matrice di rigidezza di base. Infine, si possono introdurre *macroelementi* a più di due nodi, oppure si possono definire ulteriori gradi di libertà ai nodi estremi.

9.1. Gli elementi finiti asta a sezione variabile

Si vuole ora dedurre la matrice di rigidezza di un elemento asta la cui sezione retta ha area variabile secondo la legge generica (Figura 9.1):

$$A(x) = A_1 (1 + c\chi^p) \quad (9.1)$$

dove A_1 è l'area della sezione retta nel nodo 1, χ è l'ascissa adimensionale $\chi = x/L$, ed infine c, p sono due parametri che definiscono la variabilità della sezione.

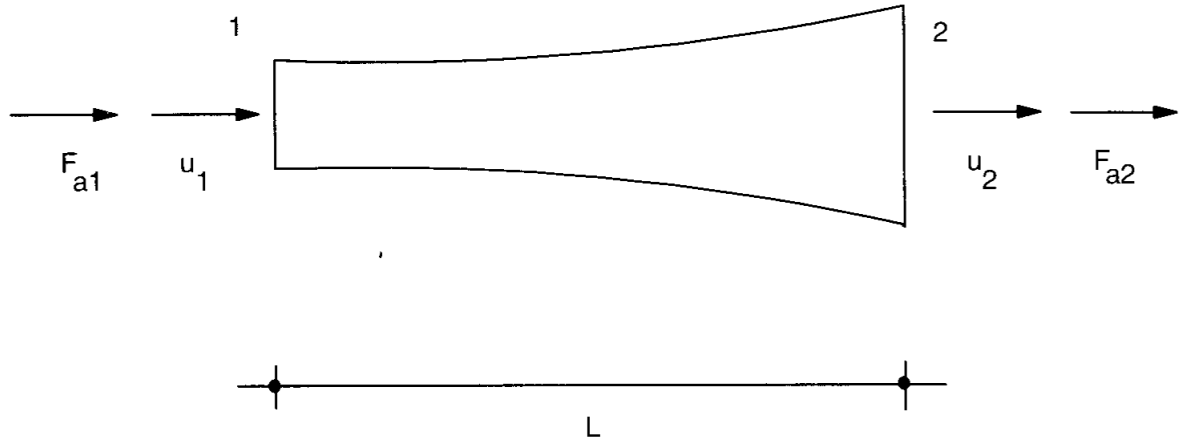


Figura 9.1- Asta a sezione variabile

La soluzione dell'equazione della linea elastica:

$$(EAu')' = 0 \quad (9.2)$$

è molto poco agevole, e si preferisce quindi ricorrere alle funzioni di forma dedotte nel capitolo precedente per l'asta a sezione costante. La matrice di rigidezza si ottiene allora dall'integrale:

$$\mathbf{k}_e = EA_1 \int_0^L (1 + c\chi^p) \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx \quad (9.3)$$

con la matrice \mathbf{B} fornita dalla (8.36).

Svolgendo i calcoli tramite MATHEMATICA, si ottiene la matrice di rigidezza approssimata per asta a sezione variabile:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA_1}{L} \left(1 + \frac{c}{p+1} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

9.2. L'elemento trave a sezione variabile

Si consideri ora il caso di un elemento trave il cui momento di inerzia varia secondo la legge:

$$I(\zeta) = I_1 (1 + s\zeta^r) \quad (9.5)$$

dove $\zeta = z/L$, ed i due parametri s ed r definiscono la variabilità della sezione. Anche in questo caso la soluzione dell'equazione differenziale della linea elastica:

$$(EIv'')'' = 0 \quad (9.6)$$

non si presenta agevole, ed è quindi conveniente ottenere una espressione approssimata della matrice di rigidezza usando le funzioni di forma cubiche (8.71). Si deve calcolare l'integrale:

$$\mathbf{k}_e = EI_0 \int_0^L (1 + s\zeta^r) \mathbf{B}^T \mathbf{B} dz \quad (9.7)$$

ottenendo:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI_1}{L} \begin{bmatrix} C_{11} \frac{12}{L^2} & -C_{12} \frac{6}{L} & -C_{13} \frac{12}{L^2} & -C_{14} \frac{6}{L} \\ -C_{12} \frac{6}{L} & 4C_{22} & C_{23} \frac{6}{L} & 2C_{24} \\ -C_{13} \frac{12}{L^2} & C_{23} \frac{6}{L} & C_{33} \frac{12}{L^2} & C_{34} \frac{6}{L} \\ -C_{14} \frac{6}{L} & 2C_{24} & C_{34} \frac{6}{L} & 4C_{44} \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

I coefficienti correttivi C_{ij} sono dati da:

$$C_{11} = C_{33} = C_{13} = 1 + s \left(\frac{3}{1+r} - \frac{12}{2+r} + \frac{12}{3+r} \right) \quad (9.9)$$

$$C_{12} = C_{23} = 1 + s \left(\frac{4}{1+r} - \frac{14}{2+r} + \frac{12}{3+r} \right) \quad (9.10)$$

$$C_{14} = C_{34} = 1 + s \left(\frac{2}{1+r} - \frac{10}{2+r} + \frac{12}{3+r} \right) \quad (9.11)$$

$$C_{22} = 1 + s \left(\frac{4}{1+r} - \frac{12}{2+r} + \frac{9}{3+r} \right) \quad (9.12)$$

$$C_{24} = 1 + s \left(\frac{4}{1+r} - \frac{18}{2+r} + \frac{18}{3+r} \right) \quad (9.13)$$

$$C_{44} = 1 + s \left(\frac{1}{1+r} - \frac{6}{2+r} + \frac{9}{3+r} \right) \quad (9.14)$$

Si noti che l'intero procedimento è sintetizzabile in poche righe di input del MATHEMATICA.

9.3. Gli elementi asta più raffinati

Un ulteriore possibilità di ottenere matrici di rigidezza che tengano conto delle variabilità di sezione risiede nell'assumere come campo di spostamenti un polinomio di ordine più elevato di quanto fatto per gli elementi di base.

9.3.1. Elemento finito asta di tipo quadratico

Per l'elemento asta, si può assumere che la funzione spostamento vari con legge quadratica all'interno dell'elemento:

$$u(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 \quad (9.15)$$

e di conseguenza le deformazioni e tensioni varieranno con legge lineare. Nasce la necessità di definire un terzo parametro nodale, al di là dei due spostamenti agli estremi. Identificato all'uopo un terzo nodo in mezzeria, il vettore delle coordinate nodali sarà (Figura 9.2):

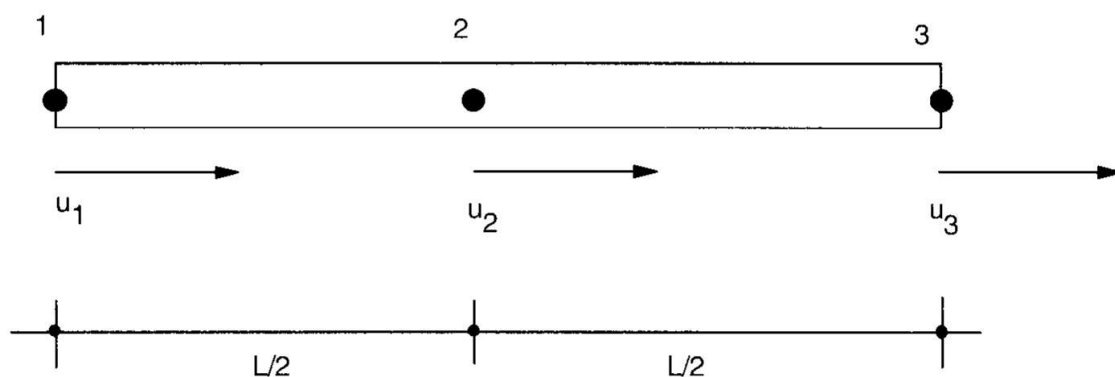


Figura 9.2- Primo livello di raffinamento per l'elemento asta

$$\mathbf{d}^T = \{u_1, u_2, u_3\} \quad (9.16)$$

e sarà possibile esprimere le coordinate lagrangiane A_i in termini di coordinate nodali u_i , imponendo le condizioni ai limiti:

$$u_1 = u(0) = A_0 \quad (9.17)$$

$$u_2 = u(L/2) = A_0 + A_1 \frac{L}{2} + A_2 \frac{L^2}{4} \quad (9.18)$$

$$u_3 = u(L) = A_0 + A_1 L + A_2 L^2 \quad (9.19)$$

Matricialmente si ha l'usuale relazione:

$$\mathbf{d} = \mathbf{CA} \quad (9.20)$$

con:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} \\ 1 & L & L^2 \end{bmatrix} \quad (9.21)$$

Invertendo questa matrice si ottiene:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L} & \frac{4}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^2} & -\frac{4}{L^2} & \frac{2}{L^2} \end{bmatrix} \quad (9.22)$$

Le funzioni di forma si ottengono immediatamente dal prodotto $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{C}^{-1}$, dove $\boldsymbol{\alpha}$ è il vettore di monomi $\{1, x, x^2\}$ (Figura 9.3):

$$N_1 = 1 - 3\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2} \quad (9.23)$$

$$N_2 = 4\frac{x}{L} - 4\frac{x^2}{L^2} \quad (9.24)$$

$$N_3 = -\frac{x}{L} + 2\frac{x^2}{L^2} \quad (9.25)$$

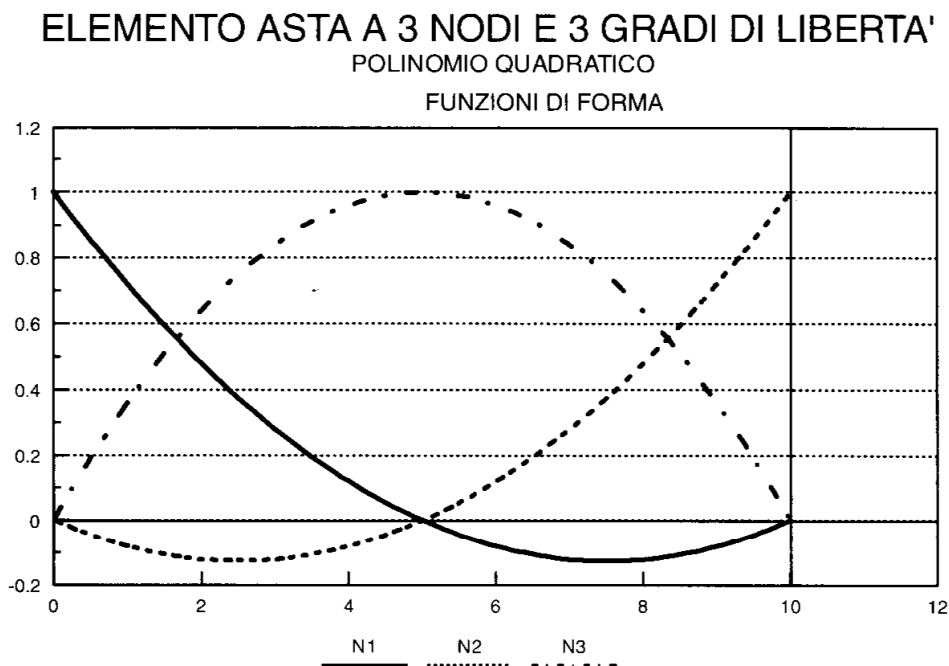


Figura 9.3- Funzioni di forma per l'asta di primo livello

La matrice di deformazione \mathbf{B} si ottiene derivando le funzioni di forma:

$$B_1 = -\frac{3}{L} + 4\frac{x}{L^2} \quad (9.26)$$

$$B_2 = \frac{4}{L} - 8\frac{x}{L^2} \quad (9.27)$$

$$B_3 = -\frac{1}{L} + 4\frac{x}{L^2} \quad (9.28)$$

ed infine la matrice di rigidezza si ottiene dal triplo prodotto matriciale:

$$\mathbf{k}_e = EA \int_0^L \mathbf{B}^T \mathbf{B} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad (9.29)$$

I carichi nodali equivalenti ad un carico agente lungo l'asta si ottengono usando la (8.91). Se ad esempio l'asta è soggetta ad un carico assiale p uniformemente distribuito, si possono dedurre i carichi nodali equivalenti come:

$$\mathbf{q} = \int_0^L \mathbf{N}^T p dx = p \int_0^L \mathbf{N}^T dx = pL \begin{Bmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{Bmatrix} \quad (9.30)$$

9.3.2. Elemento finito asta di tipo cubico

Se il campo di spostamenti è assunto di tipo cubico:

$$u(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \quad (9.31)$$

si hanno due possibilità immediate di scelta delle coordinate nodali, come illustrato in Figura 9.4.

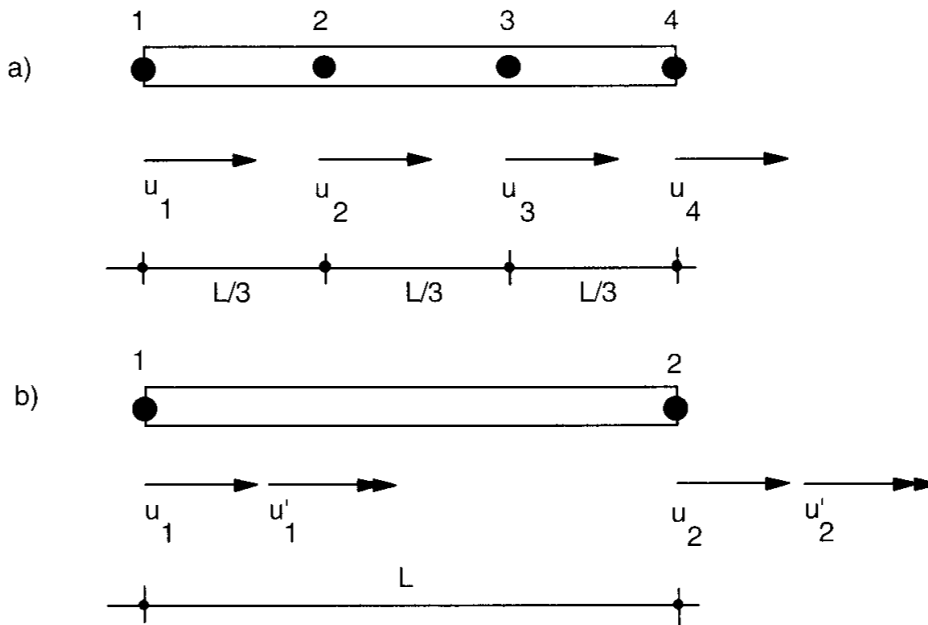


Figura 9.4- Le due aste di secondo livello di raffinamento

Nel primo caso, si è in presenza di un' asta a quattro nodi equidistanziati, ed il vettore dei gradi di libertà è costituito dagli spostamenti u_i dei nodi.

Imponendo le condizioni ai limiti si ha il sistema:

$$u_1 = A_0 \quad (9.32)$$

$$u_2 = A_0 + A_1 \frac{L}{3} + A_2 \frac{L^2}{9} + A_3 \frac{L^3}{27} \quad (9.33)$$

$$u_3 = A_0 + A_1 \frac{2}{3}L + A_2 \frac{4}{9}L^2 + A_3 \frac{8}{27}L^3 \quad (9.34)$$

$$u_4 = A_0 + A_1L + A_2L^2 + A_3L^3 \quad (9.35)$$

Invertendo la matrice dei coefficienti e sviluppando il prodotto $\alpha \mathbf{C}^{-1}$ si ottengono le funzioni di forma (Figura 9.5):

$$N_1 = 1 - \frac{11x}{2L} + 9\frac{x^2}{L^2} - \frac{9x^3}{2L^3} \quad (9.36)$$

$$N_2 = 9\frac{x}{L} - \frac{45x^2}{2L^2} + \frac{27x^3}{2L^3} \quad (9.37)$$

$$N_3 = -\frac{9x}{2L} + 18\frac{x^2}{L^2} - \frac{27x^3}{2L^3} \quad (9.38)$$

$$N_4 = \frac{x}{L} - \frac{9x^2}{2L^2} + \frac{9x^3}{2L^3} \quad (9.39)$$

ELEMENTO ASTA A 4 NODI
POLINOMIO CUBICO
FUNZIONI DI FORMA

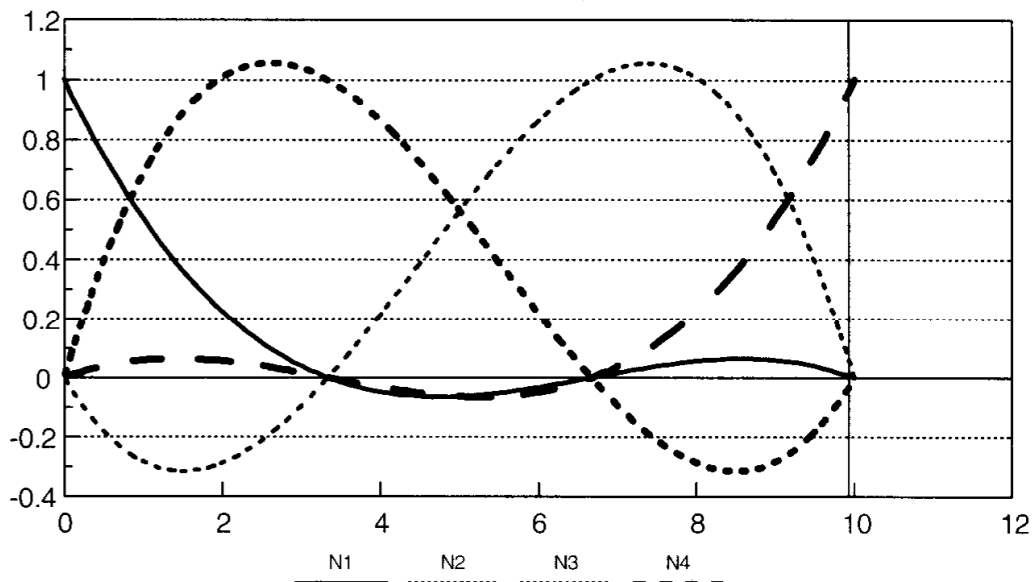


Figura 9.5- Funzioni di forma per lo schema di figura 9.4.a)

La matrice di rigidezza è quindi definita da:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{37}{10} & -\frac{189}{40} & \frac{27}{20} & -\frac{13}{40} \\ \frac{189}{40} & \frac{54}{5} & -\frac{297}{40} & \frac{27}{20} \\ \frac{27}{20} & -\frac{297}{40} & \frac{54}{5} & -\frac{189}{40} \\ -\frac{13}{40} & \frac{27}{20} & -\frac{189}{40} & \frac{37}{10} \end{bmatrix} \quad (9.40)$$

Il secondo schema di figura 9.4 porta a definire come gradi di libertà nodali non solo gli spostamenti u , ma anche le derivate prime u' , e quindi il vettore dei gradi di libertà nodali è:

$$\mathbf{d}^T = \{u_1, u'_1, u_2, u'_2\} \quad (9.41)$$

Imponendo le condizioni ai limiti si ottiene il sistema:

$$u_1 = A_0 \quad (9.42)$$

$$u'_1 = A_1 \quad (9.43)$$

$$u_2 = A_0 + A_1L + A_2L^2 + A_3L^3 \quad (9.44)$$

$$u'_2 = A_1 + 2A_2L + 3A_3L^2 \quad (9.45)$$

Invertendo la matrice dei coefficienti, e svolgendo il prodotto $\alpha \mathbf{C}^{-1}$ si ottengono le funzioni di forma (Figura 9.6):

$$N_1 = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \quad (9.46)$$

$$N_2 = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (9.47)$$

$$N_3 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \quad (9.48)$$

$$N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (9.49)$$

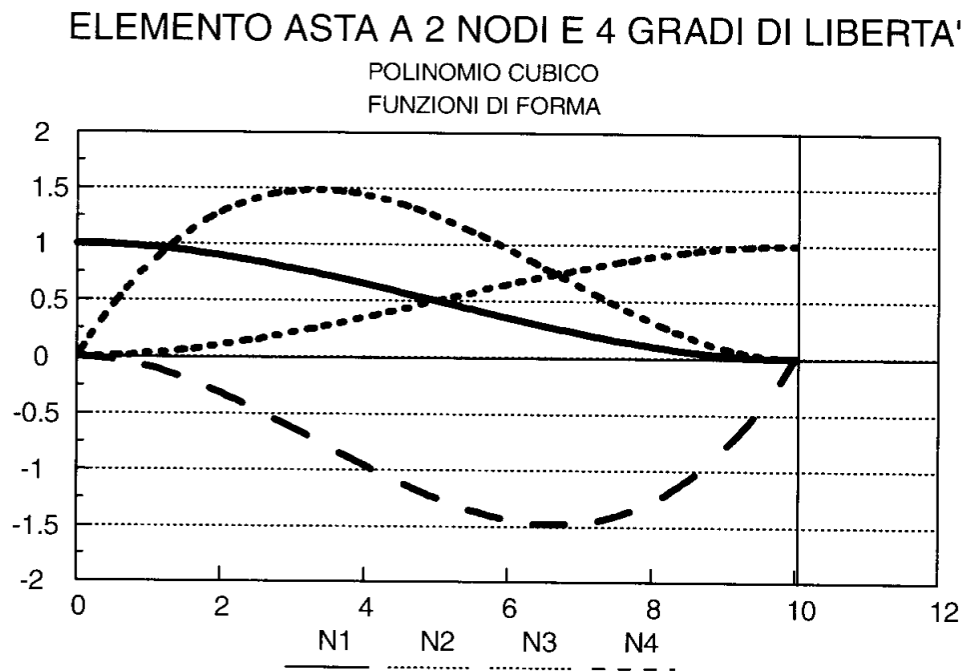


Figura 9.6- Funzioni di forma per lo schema di figura 9.4.b)

La matrice di rigidezza è quindi definita da:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & -\frac{L}{10} & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \quad (9.50)$$

9.4. Gli elementi trave più raffinati

Ogni nodo dell'elemento finito trave di Eulero-Bernoulli ha almeno due gradi di libertà, e di conseguenza il più semplice campo di spostamenti ammissibile è cubico. Il passo successivo conduce ad ipotizzare un campo di spostamenti quintico:

$$v(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + A_4z^4 + A_5z^5 \quad (9.51)$$

e quindi occorre definire altri due gradi di libertà nodali. Le due scelte più ovvie sono illustrate in Figura 9.7.

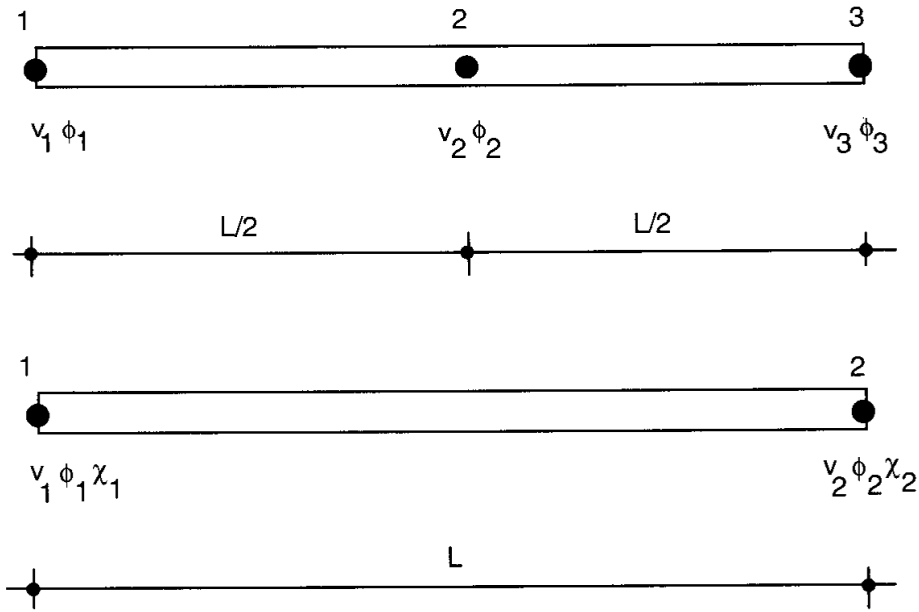


Figura 9.7- Le due travi al primo livello di raffinamento

Nel primo caso si è introdotto un terzo nodo in mezzeria, e ciascuno dei tre nodi può abbassarsi e ruotare, mentre nel secondo caso i nodi restano due, ma si è aggiunto il grado di libertà curvatura χ , pari a $-v''$.

9.4.1. Elemento finito trave quintico a tre nodi

Imponendo le condizioni ai limiti, ed invertendo la risultante matrice dei coefficienti si giunge a definire le funzioni di forma quintiche (Figura 9.8):

$$N_1 = 1 - 23 \frac{z^2}{L^2} + 66 \frac{z^3}{L^3} - 68 \frac{z^4}{L^4} + 24 \frac{z^5}{L^5} \quad (9.52)$$

$$N_2 = -z + 6 \frac{z^2}{L} - 13 \frac{z^3}{L^2} + 12 \frac{z^4}{L^3} - 4 \frac{z^5}{L^4} \quad (9.53)$$

$$N_3 = 16 \frac{z^2}{L^2} - 32 \frac{z^3}{L^3} + 16 \frac{z^4}{L^4} \quad (9.54)$$

$$N_4 = 8 \frac{z^2}{L} - 32 \frac{z^3}{L^2} + 40 \frac{z^4}{L^3} - 16 \frac{z^5}{L^4} \quad (9.55)$$

$$N_5 = 7 \frac{z^2}{L^2} - 34 \frac{z^3}{L^3} + 52 \frac{z^4}{L^4} - 24 \frac{z^5}{L^5} \quad (9.56)$$

$$N_6 = \frac{z^2}{L} - 5 \frac{z^3}{L^2} + 8 \frac{z^4}{L^3} - 4 \frac{z^5}{L^4} \quad (9.57)$$

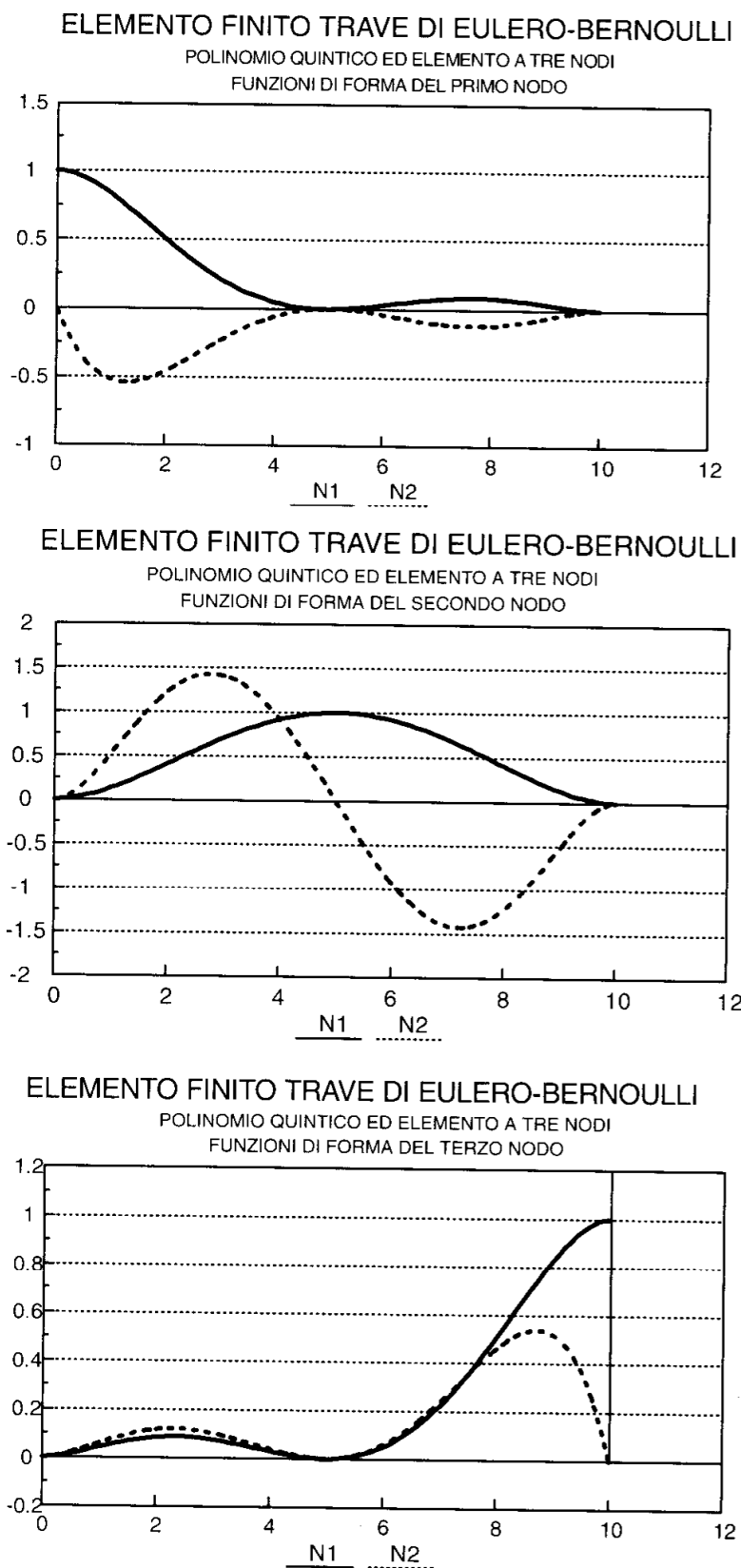


Figura 9.8- Funzioni di forma per la trave di figura 9.7.a)

che danno luogo, tramite l'usuale procedimento, alla matrice di rigidezza elementare:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{5092}{35L^2} & -\frac{1138}{35L} & -\frac{512}{5L^2} & -\frac{384}{7L} & -\frac{1508}{35L^2} & -\frac{242}{35L} \\ -\frac{1138}{35L} & \frac{332}{35} & \frac{128}{5L} & \frac{64}{7} & \frac{242}{35L} & \frac{38}{35} \\ -\frac{512}{5L^2} & \frac{128}{5L} & \frac{1024}{5L^2} & 0 & -\frac{512}{5L^2} & -\frac{128}{5L} \\ -\frac{384}{7L} & \frac{64}{7} & 0 & \frac{256}{7} & \frac{384}{7L} & \frac{64}{7} \\ -\frac{1508}{35L^2} & \frac{242}{35L} & -\frac{512}{5L^2} & \frac{384}{7L} & \frac{5092}{35L^2} & \frac{1138}{35L} \\ -\frac{242}{35L} & \frac{38}{35} & -\frac{128}{5L} & \frac{64}{7} & \frac{1138}{35L} & \frac{332}{35} \end{bmatrix} \quad (9.58)$$

Un carico q uniformemente distribuito lungo tutta la luce si traduce in un insieme di carichi nodali pari a:

$$\mathbf{q} = \int_0^L \mathbf{N}^T q dz = q \begin{Bmatrix} (7/30)L \\ -L^2/60 \\ (8/15)L \\ 0 \\ (7/30)L \\ L^2/60 \end{Bmatrix} \quad (9.59)$$

9.4.2. Elemento finito trave quintico a due nodi

Adottando lo schema di Figura 9.7.b) il vettore dei gradi di libertà è:

$$\mathbf{d}^T = \{v_1, \varphi_1, \chi_1, v_2, \varphi_2, \chi_2\} \quad (9.60)$$

Si giunge, tramite imposizione delle condizioni ai limiti:

$$v(0) = v_1 \quad (9.61)$$

$$v'(0) = -\varphi_1 \quad (9.62)$$

$$v''(0) = -\chi_1 \quad (9.63)$$

$$v(L) = v_2 \quad (9.64)$$

$$v'(L) = -\varphi_2 \quad (9.65)$$

$$v''(L) = -\chi_2 \quad (9.66)$$

alle funzioni di forma (Figura 9.9):

$$N_1 = 1 - 10 \frac{z^3}{L^3} + 15 \frac{z^4}{L^4} - 6 \frac{z^5}{L^5} \quad (9.67)$$

$$N_2 = -z + 6 \frac{z^3}{L^2} - 8 \frac{z^4}{L^3} + 3 \frac{z^5}{L^4} \quad (9.68)$$

$$N_3 = -\frac{z^2}{2} + \frac{3z^3}{2L} - \frac{3z^4}{2L^2} + \frac{1z^5}{2L^3} \quad (9.69)$$

$$N_4 = 10 \frac{z^3}{L^3} - 15 \frac{z^4}{L^4} + 6 \frac{z^5}{L^5} \quad (9.70)$$

$$N_5 = 4 \frac{z^3}{L^2} - 7 \frac{z^4}{L^3} + 3 \frac{z^5}{L^4} \quad (9.71)$$

$$N_6 = -\frac{z^3}{2L} + \frac{z^4}{L^2} - \frac{z^5}{2L^3} \quad (9.72)$$

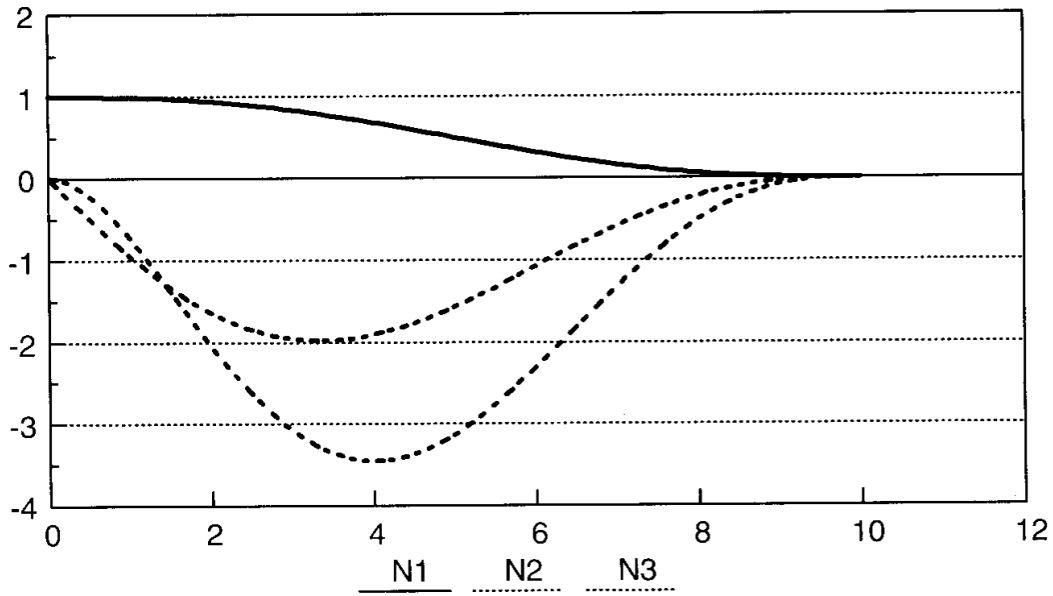
ed alla matrice di rigidezza elementare:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{120}{7L^2} & -\frac{60}{7L} & -\frac{3}{7} & -\frac{120}{7L^2} & -\frac{60}{7L} & \frac{3}{7} \\ -\frac{60}{7L} & \frac{192}{35} & \frac{11L}{35} & \frac{60}{7L} & \frac{108}{35} & -\frac{4L}{35} \\ \frac{3}{7} & \frac{11L}{35} & \frac{3L^2}{35} & \frac{3}{7} & \frac{4L}{35} & \frac{L^2}{70} \\ -\frac{120}{7L^2} & \frac{60}{7L} & \frac{3}{7} & \frac{120}{7L^2} & \frac{60}{7L} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{60}{7L} & \frac{108}{35} & \frac{4L}{35} & \frac{60}{7L} & \frac{192}{35} & -\frac{11L}{35} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4L}{35} & \frac{L^2}{70} & -\frac{3}{7} & -\frac{11L}{35} & \frac{3L^2}{35} \end{bmatrix} \quad (9.73)$$

Un carico q uniformemente distribuito lungo tutta la luce si traduce in un insieme di carichi nodali pari a:

ELEMENTO FINITO TRAVE DI EULERO-BERNOULLI

POLINOMIO QUINTICO E 2 NODI A 3 GRADI DI LIBERTA
 FUNZIONI DI FORMA DEL PRIMO NODO



ELEMENTO FINITO TRAVE DI EULERO-BERNOULLI

POLINOMIO QUINTICO E 2 NODI A 3 GRADI DI LIBERTA
 FUNZIONI DI FORMA DEL SECONDO NODO

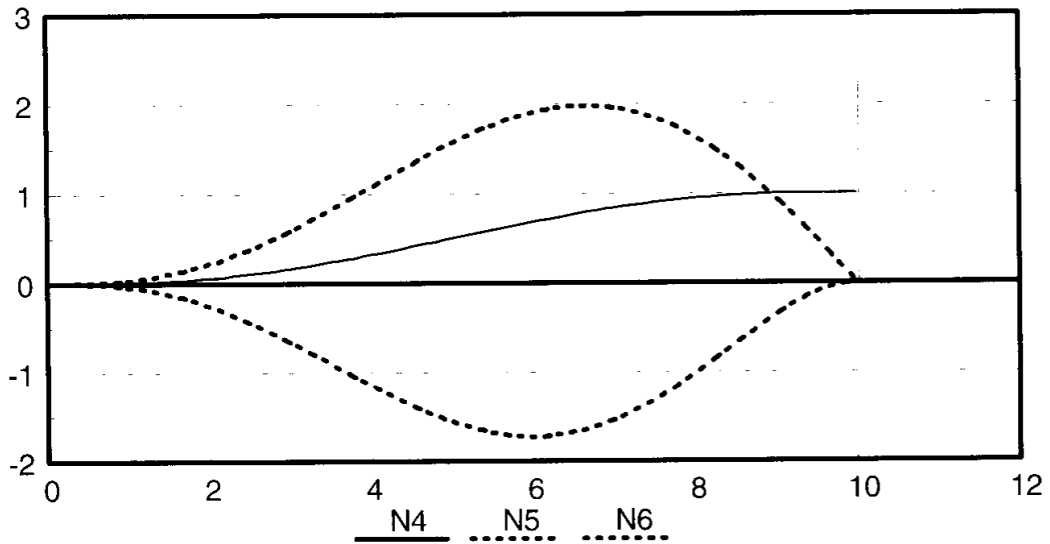


Figura 9.9- Funzioni di forma per la trave di figura 9.7.b)

$$\mathbf{q} = \int_0^L \mathbf{N}^T q dz = q \begin{pmatrix} L/2 \\ -L^2/10 \\ -L^3/120 \\ L/2 \\ L^2/10 \\ -L^3/120 \end{pmatrix} \quad (9.74)$$

9.5. La famiglia lagrangiana per gli elementi asta

Si consideri ora il caso generale di un elemento finito asta ad m nodi ed m gradi di libertà, e si vogliono calcolare le sue funzioni di forma. La generica funzione N_i sarà un polinomio di ordine $m - 1$:

$$N = A_0 + A_1 x + \dots + A_{m-1} x^{m-1} \quad (9.75)$$

i cui coefficienti possono calcolarsi imponendo che N_i assuma valore unitario nel nodo i , e sia nulla in tutti gli altri nodi.

Si tratta, in diversi termini, di calcolare il polinomio interpolante gli m punti di coordinate:

$$(x_0, 0), (x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_i, 1) \dots (x_{m-1}, 0) \quad (9.76)$$

ed il problema può considerarsi risolto, usando la:

Formula di interpolazione di Lagrange - Sia Π_{m-1} l'insieme dei polinomi reali P di grado minore od uguale ad $m - 1$. I polinomi $L_i \in \Pi_{m-1}$ definiti come:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{m-1})}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{m-1})} \quad (9.77)$$

soddisfano le condizioni $L_i(x_k) = \delta_{ik}$, e si chiamano *polinomi di Lagrange*.

Esempio 9.1: Il caso più semplice, in cui $m = 2$, fornisce i due polinomi:

$$L_1 = \frac{x - L}{-L} = 1 - \frac{x}{L} \quad (9.78)$$

$$L_2 = \frac{x}{L} \quad (9.79)$$

ossia le funzioni di forma (8.33).

Esempio 9.2: Il caso $m = 3$, con tre nodi equidistanziati, conduce ai polinomi:

$$L_1 = \frac{(x - L/2)(x - L)}{(-L/2)(-L)} = 2\frac{x^2}{L^2} - 3\frac{x}{L} + 1 \quad (9.80)$$

$$L_2 = \frac{x(x - L)}{(L/2)(L/2 - L)} = -4\frac{x^2}{L^2} + 4\frac{x}{L} \quad (9.81)$$

$$L_3 = \frac{x(x - L/2)}{(L)(L/2)} = 2\frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{L} \quad (9.82)$$

e quindi si ritrovano le funzioni di forma (9.23)–(9.25).

Esempio 9.3: Il caso $m = 4$ a nodi equidistanziati conduce direttamente alle (9.36)–(9.39).

9.7. La famiglia hermitiana per gli elementi trave

Si voglia ora calcolare le funzioni di forma dell'elemento trave ad m nodi ed a $2m$ gradi di libertà. Ciascuna delle $2m$ funzioni di forma sarà un polinomio di ordine $2m - 1$:

$$N_i = A_0 + A_1z + A_2z^2 + \dots + A_{2m-1}z^{2m-1} \quad (9.83)$$

Se i nodi sono situati alle ascisse z_k , i $2m$ coefficienti A_i possono calcolarsi imponendo le condizioni:

$$N_i(z_k) = \delta_{ik} \quad \frac{dN_i}{dz}(z_k) = 0 \quad (9.84)$$

per le funzioni di forma relative ai gradi di libertà traslazionali, e le condizioni:

$$N_i(z_k) = 0 \quad \frac{dN_i}{dz}(z_k) = -\delta_{ik} \quad (9.85)$$

per le funzioni di forma relative ai gradi di libertà rotazionali.

In altri termini, assegnate le m ascisse z_k dei nodi, i valori della funzione di forma e della sua derivata prima in corrispondenza di queste ascisse, occorre ricercare il polinomio interpolante che assuma i valori prefissati in corrispondenza delle ascisse z_k , e la cui derivata assuma i valori prefissati in corrispondenza delle stesse ascisse.

Si è quindi in presenza di un problema di interpolazione più generale del problema lagrangiano, in cui venivano prefissati i soli valori del polinomio. Il caso precedente rientra invece nella più generale:

Formula di interpolazione di Hermite - Siano z_i le ascisse degli m nodi della trave, e siano $y_i^{(k)}$ i valori che le funzioni di forma e le loro prime $n_i - 1$ derivate devono assumere in corrispondenza dei nodi. L'indice i varierà quindi tra 0 ed $m - 1$, mentre l'indice k varierà tra 0 ed $n_i - 1$.

Esiste un solo polinomio P , di grado minore o uguale ad n , con:

$$n = \sum_{i=0}^{m-1} n_i - 1 \quad (9.86)$$

che soddisfi le condizioni di interpolazione:

$$P^{(k)}(z_i) = y_i^{(k)} \quad k = 0, 1, \dots, n_i - 1 \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (9.87)$$

ed a questo polinomio può darsi forma esplicita come:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n_i-1} y_i^{(k)} L_{ik}(z) \quad (9.88)$$

I polinomi L_{ik} si possono considerare come polinomi di Lagrange generalizzati, e vengono definiti come segue:

– si parta dai polinomi ausiliari:

$$l_{ik}(z) = \frac{(z - z_i)^k}{k!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m-1} \left(\frac{z - z_j}{z_i - z_j} \right)^{n_j} \quad (9.89)$$

– si ponga:

$$L_{i, n_i-1}(z) = l_{i, n_i-1}(z) \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (9.90)$$

– e ricorsivamente, per $k = n_i - 2, n_i - 3, \dots, 0$:

$$L_{ik}(z) = l_{ik}(z) - \sum_{v=k+1}^{n_i-1} l_{ik}^{(v)}(z_i) L_{iv}(z) \quad (9.91)$$

con:

$$l_{ik}^{(v)} = \frac{\partial^v l_{ik}}{\partial z^v} \quad (9.92)$$

Esempio 9.4: Nel caso più semplice il numero dei nodi è $m = 2$, ed in ciascuno di essi occorre precisare il valore della funzione e della sua derivata, $n_0 = 2$, $n_1 = 2$. Occorre allora ricercare un polinomio di grado non maggiore di 3, esprimibile, secondo la (9.88) come:

$$P(z) = y_0^{(0)} L_{00}(z) + y_0^{(1)} L_{01}(z) + y_1^{(0)} L_{10}(z) + y_1^{(1)} L_{11}(z) \quad (9.93)$$

I polinomi ausiliari sono:

$$l_{00}(z) = \left(\frac{z-L}{L} \right)^2 \quad (9.94)$$

$$l_{01}(z) = z \left(\frac{z-L}{L} \right)^2 \quad (9.95)$$

$$l_{10}(z) = \left(\frac{z}{L} \right)^2 \quad (9.96)$$

$$l_{11}(z) = (z-L) \left(\frac{z}{L} \right)^2 \quad (9.97)$$

Ne segue:

$$L_{01}(z) = l_{01}(z) = \frac{z^3}{L^2} + z - 2\frac{z^2}{L} \quad (9.98)$$

$$L_{11}(z) = l_{11}(z) = \frac{z^3}{L^2} - \frac{z^2}{L} \quad (9.99)$$

ed induttivamente:

$$\begin{aligned} L_{10}(z) &= l_{10}(z) - l_{10}^{(1)}(L)L_{11}(z) = \frac{z^2}{L^2} - \frac{2}{L} \left(\frac{z^3}{L^2} - \frac{z^2}{L} \right) \\ &= 3\frac{z^2}{L^2} - 2\frac{z^3}{L^3} \end{aligned} \quad (9.100)$$

$$L_{00}(z) = l_{00}(z) - l_{00}^{(1)}(0)L_{01}(z) = 1 - 3\frac{z^2}{L^2} + 2\frac{z^3}{L^3} \quad (9.101)$$

La prima funzione di forma si ottiene per $y_0^{(0)} = 1$, $y_0^{(1)} = 0$, $y_1^{(0)} = 0$, $y_1^{(1)} = 0$, e quindi $N_1(z) = L_{00}(z)$. La seconda funzione di forma si ottiene per $y_0^{(0)} = 0$, $y_0^{(1)} = -1$, $y_1^{(0)} = 0$, $y_1^{(1)} = 0$, e quindi $N_2(z) = -L_{01}(z)$. Analogamente, $N_3(z) = L_{10}(z)$, ed $N_4(z) = -L_{11}(z)$.

Esempio 9.5: Come ulteriore esempio, si consideri il caso della trave a 3 nodi equidistanti a 6 gradi di libertà, per cui quindi $m = 3$, $n_0 = 2$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$. Il polinomio interpolante è dato da:

$$\begin{aligned} P(z) &= y_0^{(0)} L_{00}(z) + y_0^{(1)} L_{01}(z) + y_1^{(0)} L_{10}(z) + y_1^{(1)} L_{11}(z) \\ &\quad + y_2^{(0)} L_{20}(z) + y_2^{(1)} L_{21}(z) \end{aligned} \quad (9.102)$$

I polinomi ausiliari sono:

$$l_{00}(z) = \left(\frac{z - z_1}{z_0 - z_1} \right)^2 \left(\frac{z - z_2}{z_0 - z_2} \right)^2 \quad (9.103)$$

$$l_{10}(z) = \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^2 \left(\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} \right)^2 \quad (9.104)$$

$$l_{20}(z) = \left(\frac{z - z_0}{z_2 - z_0} \right)^2 \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^2 \quad (9.105)$$

$$l_{01}(z) = (z - z_0) \left(\frac{z - z_1}{z_0 - z_1} \right)^2 \left(\frac{z - z_2}{z_0 - z_2} \right)^2 \quad (9.106)$$

$$l_{11}(z) = (z - z_1) \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^2 \left(\frac{z - z_2}{z_1 - z_2} \right)^2 \quad (9.107)$$

$$l_{21}(z) = (z - z_2) \left(\frac{z - z_0}{z_2 - z_0} \right)^2 \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^2 \quad (9.108)$$

Si ha subito:

$$L_{01}(z) = l_{01}(z) = z - 6\frac{z^2}{L} + 13\frac{z^3}{L^2} - 12\frac{z^4}{L^3} + 4\frac{z^5}{L^4} \quad (9.109)$$

$$L_{11}(z) = l_{11}(z) = -8\frac{z^2}{L} - 40\frac{z^3}{L^2} + 32\frac{z^4}{L^3} + 16\frac{z^5}{L^4} \quad (9.110)$$

$$L_{21}(z) = l_{21}(z) = -\frac{z^2}{L} + 5\frac{z^3}{L^2} - 8\frac{z^4}{L^3} + 4\frac{z^5}{L^4} \quad (9.111)$$

e poi, per induzione:

$$L_{00}(z) = l_{00}(z) - l_{00}^{(1)}(z_0)L_{01} = 1 - 23\frac{z^2}{L^2} + 66\frac{z^3}{L^3} - 68\frac{z^4}{L^4} + 24\frac{z^5}{L^5} \quad (9.112)$$

$$L_{10}(z) = l_{10}(z) - l_{10}^{(1)}(z_1)L_{11} = 16\frac{z^2}{L^2} - 32\frac{z^3}{L^3} + 16\frac{z^4}{L^4} \quad (9.113)$$

$$L_{20}(z) = l_{20}(z) - l_{20}^{(1)}(z_2)L_{21} = 7\frac{z^2}{L^2} - 34\frac{z^3}{L^3} + 52\frac{z^4}{L^4} - 24\frac{z^5}{L^5} \quad (9.114)$$

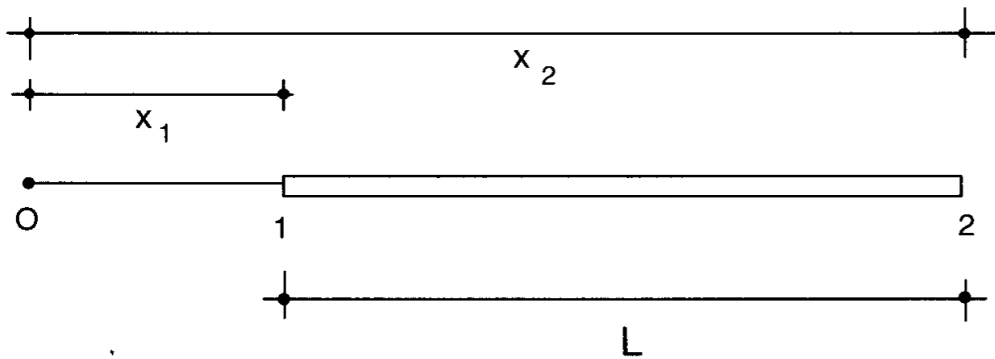


Figura 9.10- Elemento asta in coordinate cartesiane

Si sono così ritrovate le funzioni di forma (9.52)–(9.57).

9.8. Le coordinate naturali (o coordinate lunghezza)

Spesso è utile introdurre un sistema di coordinate locale, scalato e nondimensionalizzato all'intervallo $[0, 1]$. Si consideri allora l'elemento finito di Figura 9.10, di lunghezza L , in cui sia definita l'origine O degli assi. Sia x la coordinata globale, e siano x_1 ed x_2 le coordinate del nodo 1 e del nodo 2, rispettivamente.

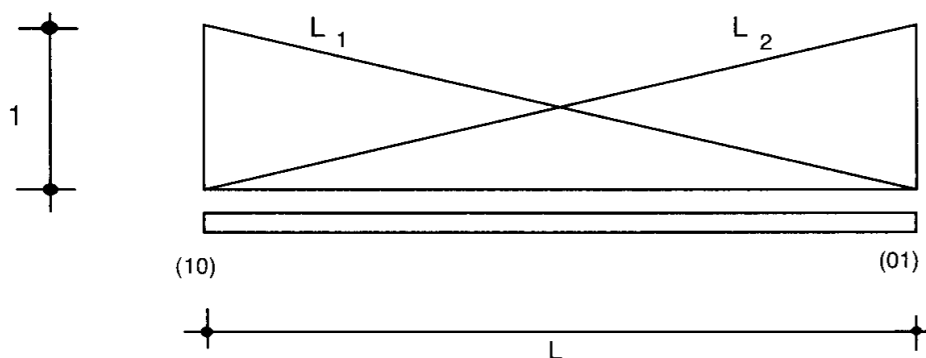


Figura 9.11- Le coordinate naturali di tipo lunghezza

Si definiscano ora due coordinate (naturali) L_1 ed L_2 , funzioni lineari della coordinata globale x , e tali che (Figura 9.11):

$$L_1(x_1) = 1 \quad (9.115)$$

$$L_1(x_2) = 0 \quad (9.116)$$

$$L_2(x_1) = 0 \quad (9.117)$$

$$L_2(x_2) = 1 \quad (9.118)$$

I due nodi estremi hanno quindi coordinate naturali $(1, 0)$ e $(0, 1)$, rispettivamente, o, per semplicità (10) e (01) . Per calcolare le coordinate naturali di un arbitrario punto intermedio di ascissa x , si consideri che dovrà essere:

$$x = L_1(x)x_1 + L_2(x)x_2 \quad (9.119)$$

e che tra L_1 ed L_2 vi è la relazione:

$$L_1(x) + L_2(x) = 1 \quad (9.120)$$

In forma matriciale, le equazioni (9.119) e (9.120) si scrivono:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.121)$$

e quindi le coordinate naturali di x saranno:

$$L_1(x) = \frac{x_2 - x}{L} \quad (9.122)$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_1}{L} \quad (9.123)$$

Tutto il processo di deduzione della matrice elementare di rigidezza e dei carichi nodali equivalenti può condursi in termini di coordinate naturali.

Nell'ambito di questo processo, si incontrano operazioni di derivazione e di integrazione. Per le prime può farsi ricorso alla regola di derivazione delle funzioni composte, per cui la derivata rispetto ad una coordinata globale x di una funzione F delle coordinate naturali L_i può scriversi come:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial L_i} \frac{dL_i}{dx} \quad i=1,2 \quad (9.124)$$

dove:

$$\frac{dL_1}{dx} = -\frac{1}{L} \tag{9.125}$$

$$\frac{dL_2}{dx} = \frac{1}{L} \tag{9.126}$$

Per le seconde, è possibile dimostrare la seguente formula:

$$\int_0^L L_1^i L_2^j dx = L \frac{i!j!}{(i+j+1)!} \tag{9.127}$$

L'introduzione delle coordinate naturali permette la generazione sistematica delle funzioni di forma per elementi monodimensionali. Si consideri ad esempio l'elemento asta ad m nodi di Figura 9.12, e si indichi il nodo generico tramite la coppia (ef) , dove e è il numero di nodi a destra del nodo in esame, ed f è il numero dei nodi a sinistra del nodo in esame. Sarà perciò $e + f = m$.

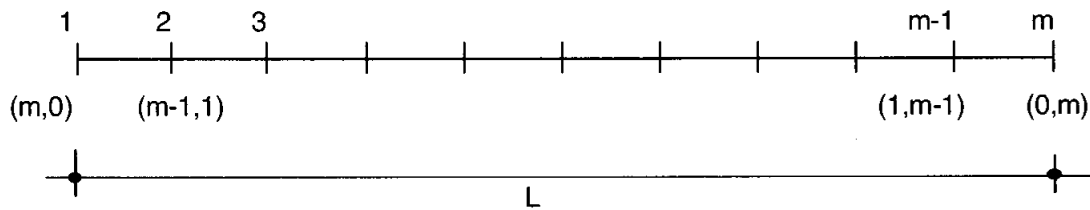


Figura 9.12- Elemento asta ad m nodi

La funzione di forma del nodo (ef) sarà fornita dal prodotto:

$$N_{ef} = N_e(L_1)N_f(L_2) \tag{9.128}$$

con:

$$N_e(L_1) = \prod_{i=1}^e \left(\frac{mL_1 - i + 1}{i} \right) \tag{9.129}$$

se $e \geq 1$, e:

$$N_e(L_1) = 1 \tag{9.130}$$

se $e = 0$. Simili formule valgono per $N_f(L_2)$. Si noti che la (9.128) non è altro che la (9.77) in termini di coordinate naturali.