Introduzione

Le tecniche di soluzione agli elementi finiti hanno virtualmente invaso tutti i campi di interesse scientifico, dalla matematica pura alla fisica, alla chimica all'ecologia, all'ingegneria civile. Qualsiasi teoria si traduca in formule ed equazioni trova la sua naturale applicazione pratica in un metodo agli elementi finiti.

Nessuna disciplina è stata comunque pervasa così profondamente come l'ingegneria delle strutture, sia nelle sue fondamenta teoriche di meccanica dei solidi che nelle varie branche applicative, dall'ingegneria aerospaziale all'ingegneria sismica. È noto, d'altra parte, che la prima applicazione di rilievo delle tecniche di discretizzazione agli elementi finiti riguarda la soluzione di un classico problema di torsione, e che la volgarizzazione del metodo è quasi interamente dovuta ad ingegneri.

Poichè qualsiasi applicazione pratica del metodo agli elementi finiti non può prescindere dall'utilizzo di mezzi di calcolo automatico, è facile indicare nel secondo dopoguerra la data di nascita delle metodologie in oggetto. Più precisamente, i lavori pionieri trattano di *analisi matriciale delle strutture*, intendendo con tale locuzione la rilettura sistematica dei classici risultati della teoria delle strutture, in una terminologia diversa e ben più adatta ai potenti mezzi di calcolo che allora nascevano.

Fondamentali in tal senso furono il contributo di Levy [1953], che introdusse il *metodo diretto* per il calcolo della matrice di rigidezza (*direct stiffness method*), la serie di memorie di Argyris [1954,1955], apparse in due successivi volumi dell'*Aircraft Engng.*, e la memoria di Turner, Clough, Martin e Topp [1956], apparsa sul *J. Aero. Sci.* Come si vede, agli albori del metodo l'ingegneria aeronautica ha svolto un ruolo fondamentale.

Al 1960 rimonta il fondamentale libro di Argyris e Kelsey, *Energy Theorems and Structural Analysis.* Di poco posteriori sono i libri *Matrix Method of Structural Analysis* di Livesley, apparso nel 1964, ed il classico *Theory of Matrix Structural Analysis* di Przemieniecki, datato 1968. L' approccio matriciale alla teoria delle strutture poteva dirsi concluso.

Nel 1960 faceva anche la sua prima comparsa il termine *elemento finito*, in un'analisi di Clough [1960] di uno stato piano di tensione, e da quel momento si ebbe uno spettacolare fiorire di differenti approcci al metodo. Di capitale importanza furono i tre convegni svoltisi nel 1965, 1968 e 1970 all' *Air Force Flight Dynamics Laboratory* di Dayton, Ohio, e forse ancor più la pubblicazione, nel 1967, del libro *The*

Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics di Zienkiewicz e Cheung. A seguito di questi eventi, il metodo agli elementi finiti divenne il più popolare approccio ai problemi strutturali.

Di pari passo con questi sviluppi pratici si è anche andata sviluppando la teoria matematica degli elementi finiti, interpretando il metodo come una generalizzazione del classico metodo di Rayleigh–Ritz. Si può citare ad esempio il lavoro del 1966 *Rayleigh–Ritz approximation by piecewise cubic polynomials*, di Birkhoff et al. Poichè il metodo di Ritz è limitato a problemi per cui esiste una formulazione variazionale, si sentì ben presto la necessità di approcci più generali, cui si arrivò, ad esempio, tramite un approccio alla Galerkin (Szabo e Lee [1969]). Non è purtroppo possibile, per ragioni di spazio, addentrarsi negli sviluppi degli anni Settanta, che videro la definitiva consacrazione del metodo agli elementi finiti come disciplina principe della matematica applicata. Il lettore interessato può consultare al riguardo l'introduzione, a firma Tinsley Oden, al secondo volume dell'*Handbook of Numerical Analysis* [1991], oppure la raccolta delle riviste quasi interamente dedicate agli elementi finiti (*Int.J.Num.Meth.Engng.*, *Comm. Appl. Math. Mech.*, *Comp. & Struct.*).

Infine, buona parte della popolarità del metodo degli elementi finiti risiede nella facilità con cui problemi anche complessi possono essere risolti a partire da schemi più semplici. Sono così sorti i cosiddetti *general purpose programs* che — almeno in teoria — dovrebbero permettere anche all'utente più inesperto di utilizzare complesse tecniche di discretizzazione.

Per un elenco dei primi programmi di questo tipo, può consultarsi Gallagher [1970], oppure Marcal [1972].

I due più noti risultati sono dovuti al gruppo di studio di Berkeley, California, facente capo a Wilson, ed a quello di Stoccarda, facente capo ad Argyris. Il primo ha dato luogo alla serie di programmi SAP, a partire dal SAPIV e giungendo alle infinite variazioni sul tema (SAP80, SAP90, SuperSap, MacSap, etc..), mentre il secondo si è concretizzato nel programma NASTRAN.

Più recentemente, si è invece assistito alla nascita di programmi ancora più complessi e specifici, in grado di svolgere analisi non lineari e di stabilità (ADINA, ABAQUS), di costruire soluzioni con livello prefissato di precisione (MSC PROBE), di raffinare automaticamente la soluzione. Inutile dire che quanto detto in prefazione, sulla pericolosità di questi programmi, non diminuisce affatto la loro enorme utilità pratica.

Il filo conduttore del presente volume segue vagamente lo sviluppo storico appena descritto. Dopo un primo, breve capitolo di preliminari matematici — necessari a rendere il testo il più possibile autosufficiente — si passa ad esporre velocemente i principali metodi variazionali, a partire dal classico principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale fino ai funzionali ibridi di più recente costruzione. Mentre l'argomento è del tutto classico, rimontando alla seconda metà dell'ottocento, si è cercato di adoperare una terminologia il più possibile moderna. Si noti come tutti i principi variazionali citati siano stati fatti derivare dal solo principio dei lavori virtuali, enunciato nella sua forma più generale.

Nel terzo capitolo si applicano i principi delle forze virtuali e degli spostamenti virtuali, giungendo a definire matricialmente il *metodo delle forze* ed il *metodo dei cedimenti*, illustrando la fondamentale difficoltà del metodo delle forze ad essere automatizzato. Si illustra anche un moderno approccio (il *metodo delle forze integrale*) che permette di evitare la scelta delle iperstatiche. Pur essendo nulla l'importanza pratica delle formule cui si giunge in questo capitolo, è comunque grande l'importanza concettuale di un simile approccio, che permette di sintetizzare in poche formule l'essenza, spesso sfuggente, dei metodi di calcolo dell'analisi strutturale.

I seguenti tre capitoli presentano la formulazione pratica del metodo dei cedimenti per travature reticolari e telai, piani e spaziali. Le matrici elementari di rigidezza dei singoli elementi vengono calcolate in via esatta, risolvendo la corrispondente equazione differenziale della linea elastica, ed un'ampia varietà di carichi viene ridotta a carichi nodali in modo consistente. I risultati cui si giunge sono pertanto esatti, a meno dell'approssimazione insita nella suddetta riduzione dei carichi distribuiti sugli elementi a carichi nodali.

Secondo la distinzione operata, ad esempio, da Dawe [1984], i tre capitoli precedenti rientrano nell' *analisi matriciale delle strutture*.

Il settimo capitolo introduce i metodi di Rayleigh–Ritz e Bubnov–Galerkin, fondamentali per una comprensione rigorosa del metodo agli elementi finiti, e tramite una larga scelta di esempi si è cercato di giungere in modo naturale al concetto di *approssimazione lineare a tratti* della soluzione. Si è così alle soglie della metodologia degli elementi finiti.

Nel capitolo seguente vengono studiati in dettaglio l'elemento asta e l'elemento trave snella, deducendo le matrici di rigidezza sia applicando il metodo di Ritz che il metodo di Galerkin. Inoltre, data la popolarità che esso gode in letteratura anglosassone, si è anche fatto cenno all'approccio di Castigliano. Dopo aver dedotto i carichi nodali equivalenti per una larga scelta di condizioni di carico, si assembla la matrice di rigidezza globale, e si impongono le condizioni ai limiti. Dopo aver risolto le equazioni di equilibrio si calcolano le tensioni e si forniscono alcuni semplici criteri di convergenza.

Il nono capitolo è dedicato ai possibili miglioramenti da apportare agli elementi asta e trave in quei casi in cui occorre una analisi più approfondita ed efficiente del normale. Il capitolo successivo, invece, parla delle travi snelle ad asse curvo, introducendo quindi il concetto di locking membranale. Per definire elementi finiti in grado di garantire buone proprietà di convergenza, si utilizzano campi polinomiali di grado abbastanza elevato, calcolando analiticamente la matrice di rigidezza con l'aiuto del MATHEMATICA.

La recente teoria dei campi consistenti è invece sfruttata al fine di ottenere elementi finiti a basso ordine di interpolazione, che siano liberi, del tutto o in parte, dai caratteristici difetti dovuti al locking.

La teoria delle travi alte, in cui l'influenza delle deformazioni da taglio diviene determinante, trova posto nell'undicesimo capitolo. Questo argomento è abbastanza negletto nei classici testi di strutture, dato che l'influenza delle deformazioni da taglio si limita a poche percentuali dell'effetto flessionale; tuttavia nell'ambito degli elementi finiti la cosiddetta teoria di Timoshenko sta rapidamente soppiantando la più classica teoria di Eulero–Bernoulli. Ciò sia perchè è comodo tener conto automaticamente delle deformazioni da taglio, sia perchè la teoria delle travi alte conduce ad un problema di tipo C^0, molto più facilmente abbordabile del corrispondente problema C^1.

L'ultimo capitolo, infine, è dedicato ad alcuni problemi 'speciali', che di per sè non meritano un capitolo a parte, ma che possono ben presentarsi nella pratica degli elementi finiti. Il primo di questi è la trave ad estremi elasticamente flessibili, snella e tozza, che viene trattata generalizzando il caso delle travi a vincoli classici.

Si discutono poi alcuni modelli di suolo, via via più complessi, limitandosi però, per motivi di ordine pratico, a generare le sole matrici di rigidezza per suolo a uno o a due parametri, per travi snelle e tozze.

Il testo è completato da alcune appendici in cui vengono riportate le subroutine di calcolo per alcune matrici di rigidezza di travi ad asse curvo e di travi di Timoshenko. Si è adoperato il BASIC compilato della Microsoft, abbastanza efficiente e veloce per i problemi affrontati in questo volume.

Il lettore che volesse approfondire gli aspetti computazionali della teoria presentata nel testo, può far richiesta all'editore del dischetto DOS con i listati dei programmi completi, e dell'allegato manuale di istruzioni, mentre chi fosse interessato agli sviluppi analitici può richiedere il dischetto DOS contenente i programmi di MATHEMATICA con cui sono stati ottenuti i risultati riportati nel testo. Assieme al dischetto, anche in questo caso, è allegato un manuale contenente istruzioni, listati ed esempi.

Nel primo caso occorre un personal computer con processore 386 e coprocessore matematico 387, dotato di sistema operativo DOS 3.2 o successivo, mentre i programmi simbolici necessitano di WINDOWS 3.1. e della versione 2.1 (o successiva) di MATHEMATICA.

Infine, è da segnalare quanto non ha potuto qui trovare posto, e che spero sarà oggetto di un ulteriore volume: stati piani di tensione e deformazione, teoria delle piastre sottili e spesse, teoria dei gusci, elementi finiti tridimensionali.